Chapitre 8: Probabilités

1 Espérance et variance

Un jeu consiste à tirer une boule dans une urne contenant 3 boules vertes, 6 boules rouges et 1 boule noire.

Le joueur mise 1 €pour pouvoir tirer une boule et gagne 14€ s'il tire la boule noire, 2€ s'il tire une boule verte et ne gagne rien s'il tire une boule rouge.

L'ensemble des gains possibles est :

$$\{-1; 1; 13\}$$

On appelle **loi de probabilité** l'association de chaque gain et de sa probabilité. La loi de probabilité associé à cette expérience est résumée dans le tableau ci-dessous :

Gain (x_i)	-1	1	13
Probabilité (p_i)	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

On appelle **espérance** de cette loi de probabilité le nombre :

$$\begin{aligned} E &= x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 \\ E &= -1 \times \frac{6}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 13 \times \frac{1}{10} \\ E &= 1 \end{aligned}$$

On appelle **variance** de cette loi de probabilité le nombre :

$$\begin{aligned} V &= (E - x_1)^2\, p_1 + (E - x_2)^2\, p_2 + (E - x_3)^2\, p_3 \\ V &= (E+1)^2 \times \frac{6}{10} + (E-1)^2 \times \frac{3}{10} + (E-13)^2 \times \frac{1}{10} \\ V &= (1+1)^2 \times \frac{6}{10} + (1-1)^2 \times \frac{3}{10} + (1-13)^2 \times \frac{1}{10} \\ V &= \frac{24}{10} + \frac{144}{10} \\ V &= \frac{168}{10} \\ V &= \frac{84}{5} \end{aligned}$$

On appelle **écart-type** de cette loi de probabilité le nombre :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{V} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{84}{5}} \\ \sigma &\simeq 4,1 \end{aligned}$$

2 Expérience de Bernoulli et loi binomiale

a) Expérience de Bernoulli

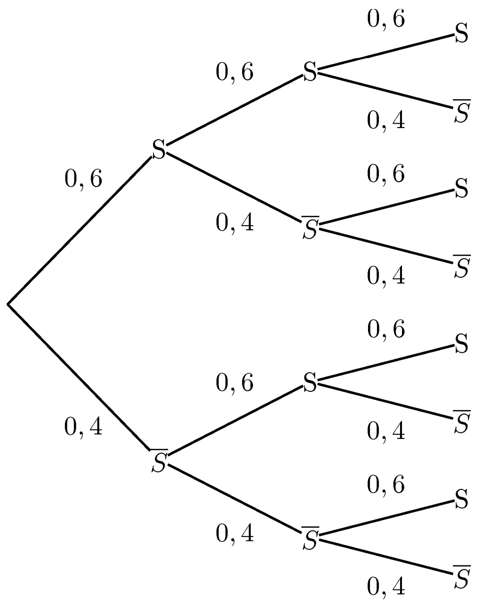
On considère l'expérience suivante : on tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et l'on gagne si un as sort et perd dans le cas contraire. Si on nomme S l'événement « tirer un as »et $\overline{S}$ l'événement « ne pas tirer un as », on a :

$$p(S) = \frac{1}{8} \qquad et \qquad p(\overline{S}) = \frac{7}{8}$$

Ici on ne s'intéresse qu'au succès ou à l'échec de cette expérience aléatoire. On dit qu'il s'agit d'une expérience de Bernoulli, du nom de Jacques Bernoulli, mathématicien suisse du XVII siècle.

b) Loi binomiale

Un groupe de musique participe à trois concours tremplin, les trois prestations était indépendantes les unes des autres. Leur nouvelle chanson leur assure à coup sur la victoire si aucun des membres du groupe ne commet d'erreur. La probabilité qu'aucun des membres du groupe ne commette d'erreur est $0,6$. On note S l'événement « il gagne le concours »et $\overline{S}$ l'événement « il ne gagne pas le concours ». On obtient l'arbre suivant :



L'événement A_0 « Échouer aux trois concours »peut être réalisé selon un unique chemin donc :

$$\begin{aligned} p(A_0) &= 0,4 \times 0,4 \times 0,4 \\ &= 0,064 \end{aligned}$$

L'événement A_1 « Obtenir un unique succès »peut être réalisé selon trois chemins donc :

$$\begin{aligned} p(A_1) &= 3 \times 0,6 \times 0,4 \times 0,4 \\ &= 0,288 \end{aligned}$$

L'événement A_2 « Obtenir deux succès exactement »peut être réalisé selon trois chemins donc :

$$\begin{aligned} p(A_2) &= 3 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,4 \\ &= 0,432 \end{aligned}$$

L'événement A_3 « Obtenir trois succès »peut être réalisé selon un unique chemin donc :

$$\begin{aligned} p(A_3) &= 0,6 \times 0,6 \times 0,6 \\ &= 0,216 \end{aligned}$$

On appelle loi binomiale la loi de probabilité associée à une succession d'épreuves de Bernoulli.