CORRIGÉ DEVOIR BILAN 3

Exercice 1: 4 points

1.
$$\lim_{x\to+\infty} x^2+3+\frac{1}{x} = +\infty$$

Posons $X = x^2+3+\dfrac{1}{x}$

$$\lim_{X\to+\infty} -\sqrt{X} = -\infty$$

donc

$$\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x^2+3+\frac{1}{x}} = -\infty$$

2. Pour tout $x<0$, on a : $\quad 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2x^2+3} \quad$ et

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2+3} = 0$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

3. Pour $x \neq 0$, $\dfrac{7x^2}{-x^2} = -7$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2+6x-4}{x-x^2} = -7$$

4.
$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}+3 = +\infty$$

Posons $X = \dfrac{1}{x}+3$

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

donc

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{\frac{1}{x}+3} = +\infty$$

Exercice 2: 4 points

a.	b.	c.	d.
$\lim_{x\to+\infty} f(x)+h(x) = 4$	$\lim_{x\to+\infty} f(x)\times h(x) = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{h(x)} = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exercice 3: 12 points

1. f est une fonction rationnelle. Pour $x \neq 0$, on a : $\quad \dfrac{-x^2}{x} = -x \quad$ donc :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$$

2. Pour tout réel $x \neq 3$,

$$\begin{aligned} -x+1+\frac{3}{x-3} &= \frac{(-x+1)(x-3)}{x-3} + \frac{3}{x-3} \\ &= \frac{-x^2+3x+x-3+3}{x-3} \\ &= \frac{-x^2+4x}{x-3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

3. a. Pour tout réel $x \neq 3$, $\quad f(x) - (-x+1) = \dfrac{3}{x-3}$ et comme

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x-3} = 0 \qquad et \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x-3} = 0$$

On en déduit que Δ est une asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Pour tout réel $x \neq 3$, $\quad f(x) - (-x+1)$ admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty \quad 3 \quad +\infty$
$x-3$	$-0+$
$f(x)-(-x+1)$	$-\quad \Vert \quad +$

Conclusion : C_f est au dessus de Δ sur $]3;+\infty[$ et en dessous sur $]-\infty;3[$.

4. a.

$$\lim_{x \to 3^-} x - 3 = 0^- \qquad donc \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x-3} = -\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to 3^-} -x+1 = -2$$

donc

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$$

De même :

$$\lim_{x \to 3^+} x - 3 = 0^+ \qquad donc \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x-3} = +\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to 3^+} -x+1 = -2$$

donc

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$$

b. **Conclusion :** La droite D d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à C_f.

5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{3\}$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$\begin{aligned} f('x) &= \frac{(-2x+4)(x-3) - (-x^2+4x)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-2x^2+6x+4x-12+x^2-4x)}{(x-3)^2} \\ &= \frac{-x^2+6x-12}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Pour tout réel $x \neq 3$, on a :

- $(x-3)^2 > 0$
- $-x^2+6x-12$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = -12$ et comme $a = -1$, on en déduit que $-x^2+6x-12 < 0$ pour tout réel x.

Conclusion : pour tout réel $x \neq 3$, $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty;3[$ et sur $]3;+\infty[$.

6. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad ou \quad x = 4$. Les antécédents de 0 par la fonction f sont 0 et 4.

7. Représentation graphique :