

CORRIGÉ DEVOIR BILAN 4

Exercice 1:

4 points

1. Réponse a)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

2. Réponse a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

3. Réponse c)

Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} \ln(4x - 4) &= 2 \ln x \\ \ln(4x - 4) &= \ln x^2 \\ 4x - 4 &= x^2 \\ -x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ -(x - 2)^2 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

4. Réponse a)

Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} \ln x^2 - 3 \ln x + \ln e &= 2 \ln x - 3 \ln x + \ln e \\ &= -\ln x + \ln e \\ &= \ln \frac{e}{x} \end{aligned}$$

Exercice 2:

12 points

1. a. Graphiquement, $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(4) = 0$ et $f'(2) = 0$.

b. Puisque $f(1) = 0$ et $f(4) = 0$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b - \frac{16}{1} = 0 \\ 4a + b - \frac{16}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - 16 = 0 \\ 4a + b - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 16 \\ 4a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 16 - a \\ 3a = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 20 \\ a = -4 \end{cases}$$

2. a. f est dérivable sur $[1; 6]$ et :

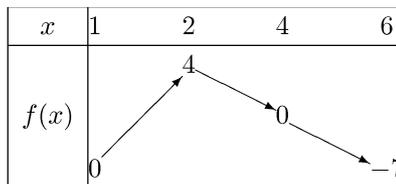
$$\begin{aligned} f'(x) &= -4 + \frac{16}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{16 - 4x^2}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{(4 - 2x)(4 + 2x)}{x^2} \end{aligned}$$

Sur $[1; 6]$, $4 + 2x > 0$ et $x^2 > 0$ donc f' est du signe de $4 - 2x$:

x	1	2	6
$f'(x)$	+	0	-

On en déduit que f est croissante sur $[1; 2]$ et décroissante sur $[2; 6]$.

b. On a :



c. On a obtenu par lecture du tableau de variation le signe de la fonction f :

x	1	4	6
$f'(x)$	0	+	-

3. a. Il suffit de dériver F et de montrer que $F(1) = 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= -2 \times 2x + 20 \times 1 - 0 - 16 \times \frac{1}{x} \\ F'(x) &= -4x + 20 - \frac{16}{x} \\ F'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F(1) &= -2 \times 1^2 + 20 \times 1 - 18 - 16 \times \ln 1 \\ F(1) &= -2 + 20 - 18 \\ F(1) &= 0 \end{aligned}$$

b. $F'(x) = f(x)$ donc à partir du tableau de signe de f on obtient les variations de F :

x	1	4	6
$F(x)$	0	7,819	1,332

Exercice 3:

4 points

1. f est de la forme $\ln[u(x)]$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ f'(x) &= \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

2. $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$. Comme $u(x) > 0$ sur \mathbb{R} , on a :

$$\begin{aligned} G(x) &= \ln[u(x)] \\ G(x) &= \ln(x^2 + 1) \end{aligned}$$

On en déduit que les primitives de f sont de la forme :

$$F(x) = x^3 + \frac{7x^2}{2} + 4\ln(x^2 + 1) + c$$

et

$$\begin{aligned} F(0) &= 0^3 + \frac{7 \times 0^2}{2} + 4\ln(0^2 + 1) + c \\ F(0) &= 4\ln(1) + c \\ F(0) &= c \end{aligned}$$

donc $c = 0$ et

$$F(x) = x^3 + \frac{7x^2}{2} + 4\ln(x^2 + 1)$$