CORRIGÉ DEVOIR BILAN 4

Exercice 1: 4 points

1. Réponse a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$$

2. Réponse a)

$$\lim_{x\to 0} xlnx = 0$$

3. Réponse c)
   Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{array}{rcl} ln(4x-4) & = & 2lnx \\ ln(4x-4) & = & lnx^2 \\ 4x-4 & = & x^2 \\ -x^2+4x-4 & = & 0 \\ -(x-2)^2 & = & 0 \\ x-2 & = & 0 \\ x & = & 2 \end{array}$$

4. Réponse a)
   Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{array}{rcl} lnx^2 - 3lnx + lne & = & 2lnx - 3lnx + lne \\ & = & -lnx + lne \\ & = & ln\frac{e}{x} \end{array}$$

Exercice 2: 12 points

1. a. Graphiquement, $f(1) = 0$, ,$f(2) = 4$, $f(4) = 0$ et $f'(2) = 0$.
   b. Puisque $f(1) = 0$ et $f(4) = 0$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b-\frac{16}{1} = 0 \\ 4a+b-\frac{16}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-16 = 0 \\ 4a+b-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 16 \\ 4a+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 16-a \\ 3a = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 20 \\ a = -4 \end{cases}$$

2. a. f est dérivable sur $[1;6]$ et :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & -4 + \frac{16}{x^2} \\ f'(x) & = & \frac{16-4x^2}{x^2} \\ f'(x) & = & \frac{(4-2x)(4+2x)}{x^2} \end{array}$$

   Sur $[1;6]$, $4+2x > 0$ et $x^2 > 0$ donc f' est du signe de $4-2x$:

x	1		2		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

   On en déduit que f est croissante sur $[1;2]$ et décroissante sur $[2;6]$.

   b. On a :

x	1		2		4		6
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↘	-7

   c. On a obtient par lecture du tableau de variation le signe de la fonction f :

x	1		4		6
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	

3. a. Il suffit de dériver F et de montrer que $F(1) = 0$:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -2 \times 2x + 20 \times 1 - 0 - 16 \times \frac{1}{x} \\
F'(x) &= -4x + 20 - \frac{16}{x} \\
F'(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F(1) &= -2 \times 1^2 + 20 \times 1 - 18 - 16 \times ln1 \\
F(1) &= -2 + 20 - 18 \\
F(1) &= 0
\end{aligned}$$

b. $F'(x) = f(x)$ donc à partir du tableau de signe de f on obtient les variations de F :

x	1	4	6
$F(x)$	0 $\nearrow$	$7,819$	$\searrow$ $1,332$

Exercice 3: 4 points

1. f est de la forme $ln[u(x)]$ avec $u(x) = x^2 + x + 1$ et $u'(x) = 2x + 1$ donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\
f'(x) &= \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}
\end{aligned}$$

2. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $u'(x) = 2x$. Comme $u(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
G(x) &= ln[u(x)] \\
G(x) &= ln(x^2 + 1)
\end{aligned}$$

On en déduit que les primitives de f sont de la forme :

$$F(x) = x^3 + \frac{7x^2}{2} + 4ln(x^2 + 1) + c$$

et

$$\begin{aligned}
F(0) &= 0^3 + \frac{7 \times 0^2}{2} + 4ln(0^2 + 1) + c \\
F(0) &= 4ln(1) + c \\
F(0) &= c
\end{aligned}$$

donc $c = 0$ et

$$F(x) = x^3 + \frac{7x^2}{2} + 4ln(x^2 + 1)$$