Corrigé du devoir maison 2

Exercice 1: 4 points

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 2x^3 - x^2 + 6$

b. $x^2 + 3x + 6$ est un polynôme du second degré avec $\Delta < 0$ et $a > 0$ donc $x^2 + 3x + 6 > 0$ pour tout réel x et on en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Comme $g = m \circ u$ avec $m(x) = \sqrt{x}$ et $u(x) = x^2 + 3x + 6$ on a :

$$g'(x) = u'(x)m'[u(x)] = (2x+3)\frac{1}{2\sqrt{x^2+3x+6}} = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+6}}$$

c. Ici la fonction f pose problème puisqu'elle s'annule en 0 et une valeur α que l'on ne peux pas déterminer simplement donc h est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0; \alpha\}$.

$$h'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{-2x^3 + x^2 - 6}{\left(\frac{x^4}{2} - \frac{1}{3}x^3 + 6x\right)^2}$$

Exercice 2: 6 points

a. $x^2 - 3x + 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 5$ donc $x^2 - 3x + 1 = 0$ admet deux solutions :

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad et \quad \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Comme $a > 0$, on en déduit que $x^2 - 3x + 1$ admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où f admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 3x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme et $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$. $3x^2 - 6x + 1$ est une fonction polynôme du second degré avec $\Delta = 24$ donc $3x^2 - 6x + 1 = 0$ admet deux solutions :

$$\frac{6-\sqrt{24}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3} \quad et \quad \frac{6+\sqrt{24}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Comme $a > 0$, on en déduit que $3x^2 - 6x + 1$ admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$1+\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c. D'après la question précédente, on a :

x	$-\infty$		$1-\frac{\sqrt{6}}{3}$		$1+\frac{\sqrt{6}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	$\searrow$	$f\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	$\nearrow$	

Exercice 3: 10 points

1. a. x^3 est le monôme de plus haut degré de la fonction g et

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

b. g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme fonction polynôme et $g'(x) = 3x^2 - 1200$.
$3x^2 - 1200$ est une fonction polynôme du second degré avec $a > 0$ et :
$3x^2 - 1200 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 400 \Leftrightarrow x = -20 \quad ou \quad x = 20$
donc

x	0		20		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-100	$\searrow$	-16100	$\nearrow$	

c. $g'(x) > 0$ pour $x \in [20; 40]$, de plus :

$$g(20) = -16100 \text{ et } g(40) = 15900 \text{ donc } 0 \in [g(20); g(40)]$$

donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un unique réel α, $\alpha \in [20; 40]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

d. $34.6 < \alpha < 34.7$ donc $\alpha \simeq 35$

e. Comme $g(x) < -100$ pour $x \in [0; 20]$ on en déduit que :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. a. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{1200x + 50}{x^2} = \frac{1200x}{x^2} + \frac{50}{x^2} = \frac{1200}{x} + \frac{50}{x^2}$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} x + 50 = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{50}{x^2} = 0 et \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1200}{x} = 0 \quad donc \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} x + 50 = 50 \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{50}{x^2} = +\infty et \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1200}{x} = +\infty \quad donc \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

b. f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme fonction rationnelle et

$$f'(x) = 1 + \frac{(1200)(x^2) - (1200x + 50)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{x^4 - 1200x^2 - 100x}{x^4} = \frac{x^3 - 1200x - 100}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

On peut "simplifier" par x puisque $x \in]0; +\infty[$!

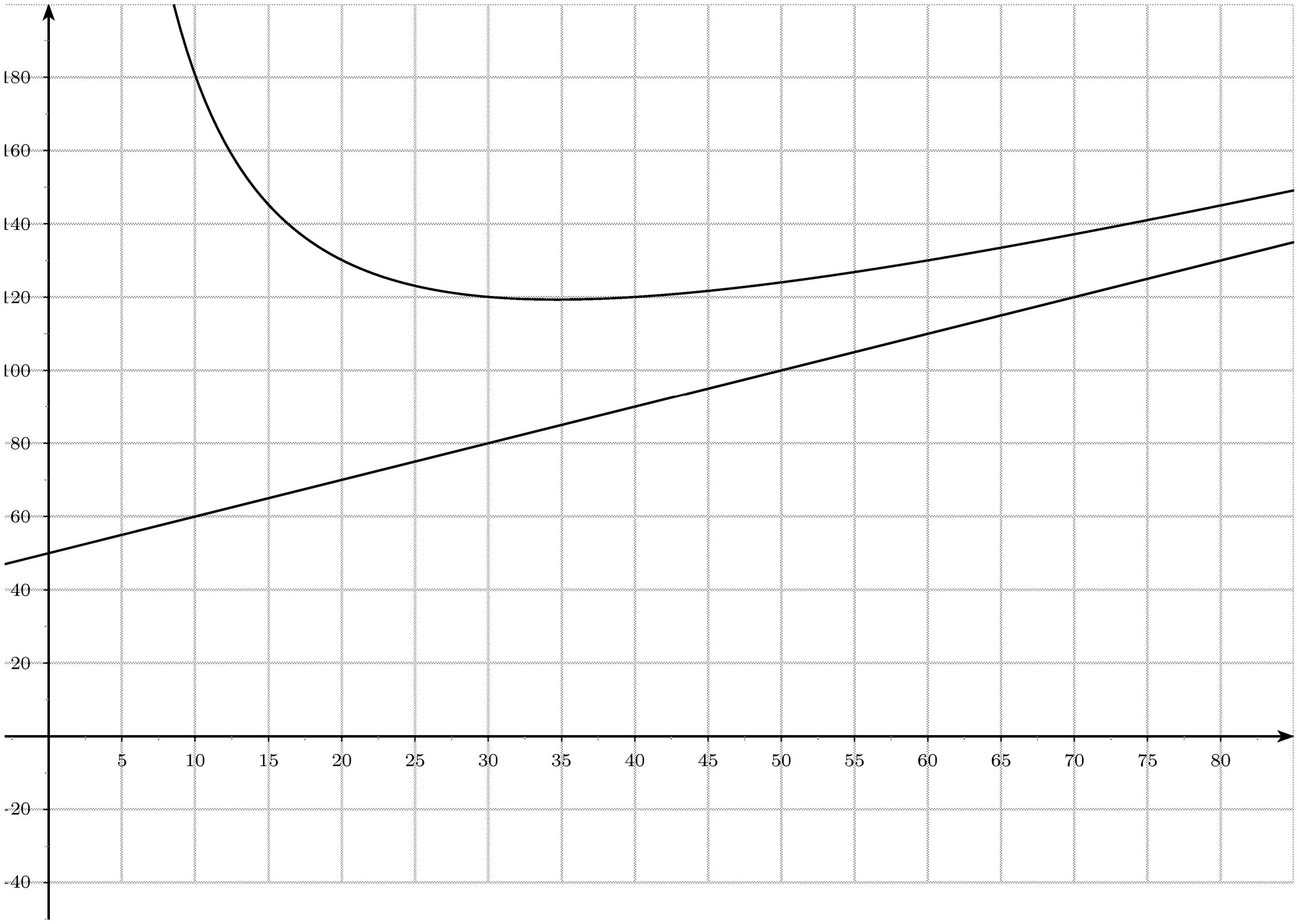
c. Sur $]0; +\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ donc :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

d. Pour $x \neq 0$, $f(x) - (x + 50) = \dfrac{1200x + 50}{x^2}$ et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1200x + 50}{x^2} = 0$$

donc la droite D d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.



180
160
140
120
100
80
60
40
20
-20
-40
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
75
80