

Corrigé du devoir maison 3

Exercice 1:

6 points

- a. f est une fonction polynôme, $-5x^3$ est son monôme de plus haut degré et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- b.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 7 = +\infty$$

Posons $X = x^2 + 7$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} -\sqrt{X} = -\infty$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{x^2 + 7} = -\infty$$

- c.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} x - 5 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} x = 5$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x}{x - 5} = +\infty$$

- d.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} x + 3 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} x = -3$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} x + \frac{8}{x + 3} = -\infty$$

Exercice 2:

5 points

- a. f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$

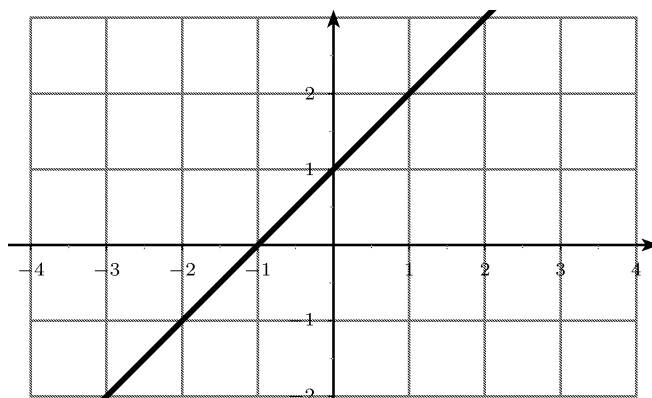
- b. Pour tout réel $x \neq -2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \frac{x^2 - 4}{x + 2} \\ f(x) &= 3 + \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} \\ f(x) &= 3 + x - 2 \\ f(x) &= x + 1 \end{aligned}$$

- c. Pour $x \neq -2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x + 1 = -1$$

- d. Courbe représentative de la fonction f sur $\mathbb{R}$:



1. a. g est une fonction rationnelle. Pour $x \neq 0$, on a : $\frac{x^2}{-x} = -x$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2 - x = 0^+ \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2 - x = 0^- \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty$$

b.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$$

donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction g .

2. Pour étudier les variations de la fonction g , on étudie le signe de sa fonction dérivée :

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$ comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{(2x)(2-x) - (-1)x^2}{(2-x)^2} \\ &= \frac{4x - 2x^2 + x^2}{(2-x)^2} \\ &= \frac{x(4-x)}{(2-x)^2} \end{aligned}$$

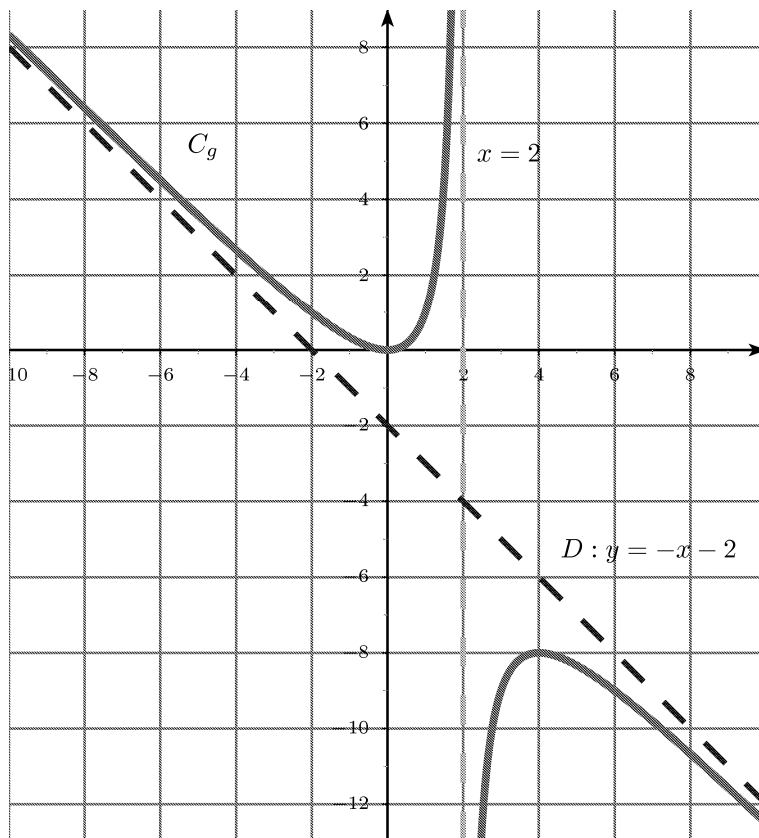
Pour tout réel $x \neq 2$, on a : $(2-x)^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x(4-x)$:

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
x		-	0	+	+
$4-x$		+	+	0	-
$g'(x)$		-	0	+	-

D'où g admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	-
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

3. Courbe représentative de la fonction g :



4. a. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= ax + b + \frac{c}{2-x} \\
 &= \frac{(ax+b)(2-x) + c}{2-x} \\
 &= \frac{2ax + 2b - ax^2 - bx + c}{2-x} \\
 &= \frac{-ax^2 + (2a-b)x + c + 2b}{2-x}
 \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 0 \\ c + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$$

Conclusion : Pour tout réel $x \neq 2$,

$$g(x) = -x - 2 + \frac{4}{2-x}$$

b. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$g(x) - (-x - 2) = \frac{4}{2-x}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4}{2-x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{2-x} = -\infty$$

Conclusion : La droite D d'équation $y = -x - 2$ est une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$ à la courbe C_g .

c. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$g(x) - (-x - 2) = \frac{4}{2-x}$$

et

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2-x$	$+\infty$	0	$-\infty$
$g(x) - (-x - 2)$	$+$	$\parallel$	$-$

Conclusion : C_g est au dessus de D sur $] -\infty; 2[$ et au dessous de D sur $]2; +\infty[$.