DEVOIR MAISON 7

Enseignant : GREAU D. **Classe :** TES1 **Date :** A rendre avant le 27/05/2011	**Nom :** **Prénom :**	**Note :**

Exercice 1: 5 points

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :
- un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients.

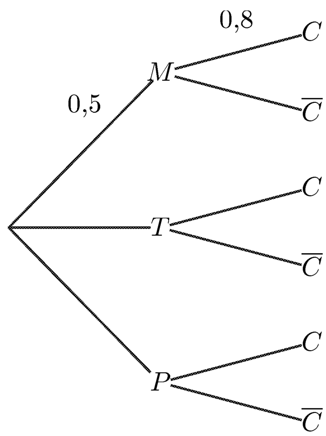
20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :
- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :
- M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement : « Le client prend un café » et $\overline{C}$ l'évènement contraire de C.

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $P_T(C)$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.

   b. Montrer que $p(C) = 0,76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (*On donnera le résultat arrondi au centième*).
5. Un assortiment de macarons est vendu 6 euros, une part de tarte tatin est vendue 7 euros, et un café est vendu 2 euros. Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18 euros, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

   a. Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?

   b. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

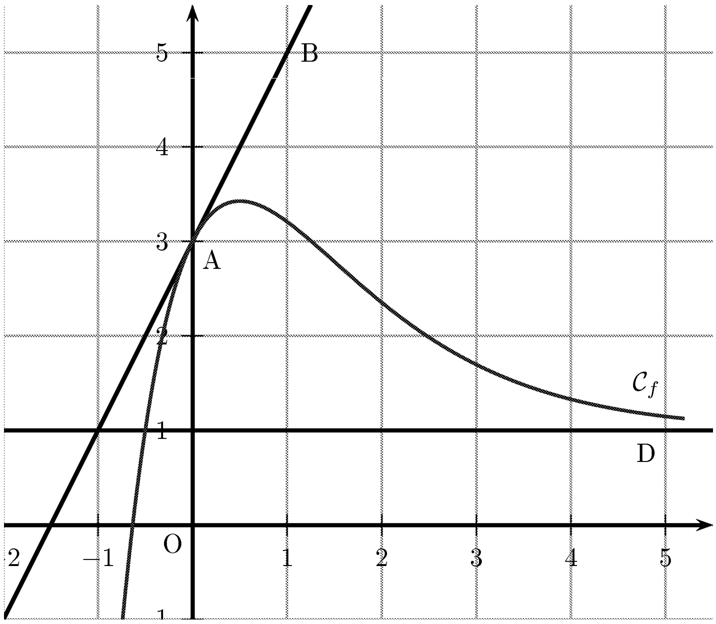
Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
$p(s_i)$	0,02	0,18	...			

   c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

Exercice 2: 4 points

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' la fonction dérivée de f.

- La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A$(0\,;\,3)$ passe par le point B$(1\,;\,5)$.
- La droite D d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.



1. En utilisant les données et le graphique, préciser :
   a. La valeur du réel $f(0)$ et la valeur du réel $f'(0)$.
   b. La limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .
3. Préciser un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
4. On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par une expression de la forme $f(x) = 1 + \dfrac{ax+b}{\mathrm{e}^x}$, où a et b sont des nombres réels.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, de b et de x.
   b. À l'aide des résultats de la question 1. a., démontrer que l'on a, pour tout réel x :
   $$f(x) = 1 + \frac{4x+2}{\mathrm{e}^x}.$$
5. Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x + \dfrac{-4x-6}{\mathrm{e}^x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
   Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 3. ?

Exercice 3: 5 points

Le responsable d'un site Internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site chaque semaine.

Partie A

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées, exprimé en milliers, durant chacune des quatre semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$	1	2	3	4
Nombre de pages visitées en milliers : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 4$	40	45	55	70

Ainsi, au cours de la deuxième semaine après l'ouverture du site, 4500 pages ont été visitées.

1. Le nuage de points $M_i\,(x_i\ ;\ y_i)$ associé à cette série statistique est représenté en annexe 1 dans un repère orthogonal. L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.
   a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage puis placer ce point sur le graphique de **l'annexe 1**.
   b. On appelle (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Parmi les deux propositions ci-dessous, une seule correspond à l'équation réduite de la droite (d). Préciser laquelle, en utilisant le point moyen G :

$$y = 9x + 29 \qquad y = 10x + 27,5$$

   c. Tracer la droite (d) sur le graphique de l'annexe 1.
2. En supposant que cet ajustement reste valable pendant les deux mois qui suivent l'ouverture du site, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

Partie B

Le responsable décide de mettre en place, au cours de la quatrième semaine suivant l'ouverture du site, une vaste campagne publicitaire afin d'augmenter le nombre de visiteurs du site.
Il étudie ensuite l'évolution du nombre de pages du site visitées au cours des trois semaines suivant cette opération publicitaire.
Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées au cours des sept semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pages visitées en milliers : y_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	40	45	55	70	95	125	175

1. Compléter le nuage de points fourni dans **l'annexe 1** par les trois nouveaux points définis dans le tableau précédent.
   Compte tenu de l'allure du nuage, un ajustement exponentiel semble approprié.
   Pour cela on pose $z = \ln y$.
2. On donne ci-dessous les valeurs de $z_i = \ln(y_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 7$, les résultats étant arrondis au centième.

Semaine x_i, $1 \leqslant i \leqslant 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant 7$	3,69	3,81	4,01	4,25	4,55	4,83	5,16

   a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
   On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, en arrondissant les coefficients a et b au centième.
   b. En déduire la relation $y = \alpha \mathrm{e}^{\beta x}$, où $27,94$ et $0,25$ sont des valeurs approchées au centième des réels α et β respectivement.
   c. À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.
   Combien de semaines auraient été nécessaires pour atteindre ce résultat sans campagne publicitaire ? (on utilisera l'ajustement obtenu dans la **partie A**).

Exercice 4: 6 points

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.
Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.

Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_{\text{T}}(x)$, pour x variant de $0,25$ à 5, le coût total de production correspondant.
La courbe Γ_1 fournie en **annexe 2** est la représentation graphique de la fonction C_{T} sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
La tangente à Γ_1 au point A$(1\,;\,1)$ est horizontale.

Partie A

1. a. On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0{,}25\,;\,5]$ par
$R(x) = 1,5x$.
Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?
   b. Tracer, sur le graphique fourni en **annexe 2**, le segment représentant graphiquement la fonction R.
2. **Lectures graphiques**

   Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe 2.
   Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.

   a. Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégageant un bénéfice positif.
   b. Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.
   c. Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?
   À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_{T} est définie sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$ par

$$C_{\text{T}}(x) = x^2 - 2x\ln(x).$$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1,5x - x^2 + 2x\ln(x).$$

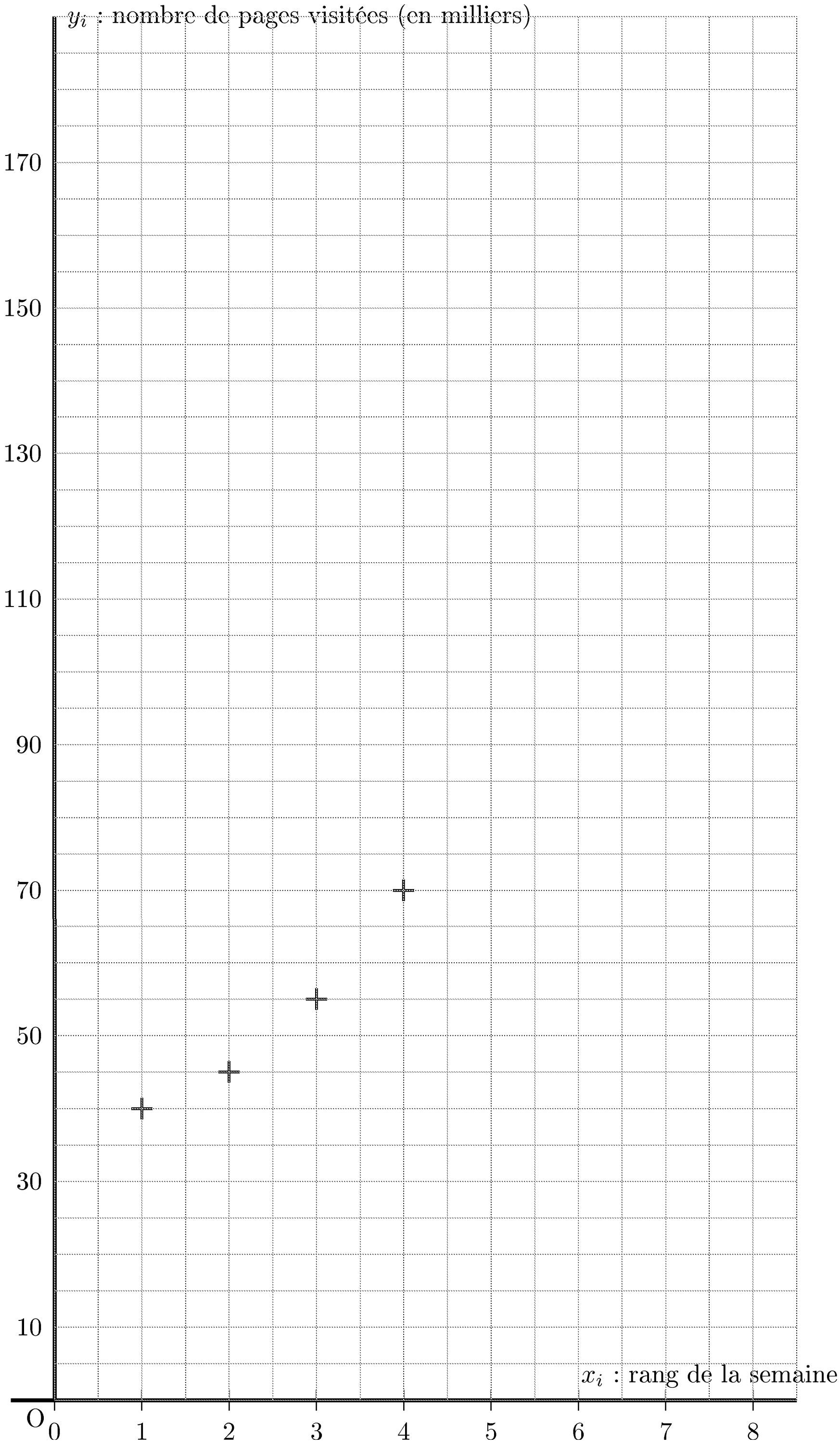
   Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la **partie A**.
2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = 2\ln(x) - 2x + 3,5$.
3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B', dérivée de la fonction B, sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$:

x	$0,25$		1		5
$B'(x)$			1,5		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	y_1				y_2

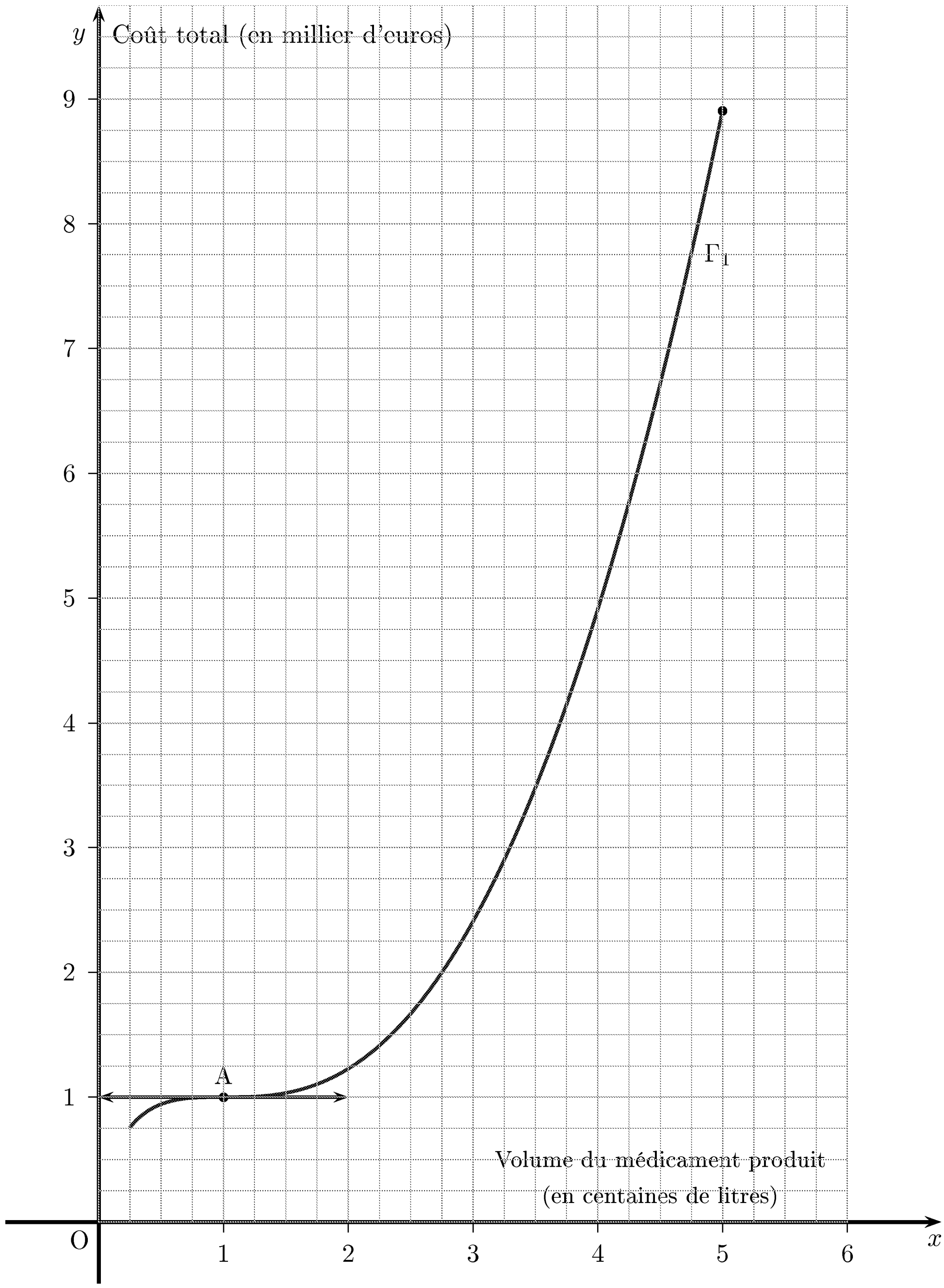
   On précise les encadrements : $0,22 < y_1 < 0,23$ et $-3,29 < y_2 < -3,28$.

   a. Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $2,77$ pour valeur approchée de α.
   b. Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
   En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0{,}25\,;\,5]$.
4. a. Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres). Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.
   b. Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

ANNEXE 1


y_i : nombre de pages visitées (en milliers)
170
150
130
110
90
70
50
30
10
O
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x_i : rang de la semaine

ANNEXE 2


y
Coût total (en millier d'euros)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Γ_1
A
O
1
2
3
4
5
6
x
Volume du médicament produit
(en centaines de litres)