Corrigé du devoir maison 5

Exercice 1: 3 points

1. La dérivée de la fonction $\ln[f(x)]$ sur $[0;6[$ est $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$. Comme f est positive sur $[0;6[$, $(\ln[f(x)])'$ est du signe de $f'(x)$ donc f et $\ln[f(x)]$ ont les mêmes variations.
2. On applique la formule du cours sachant que $g'(x) = 4 - \dfrac{2}{x}$ donc $g'(1) = 2$ et $g(1) = 4$

$$\begin{array}{rcl} y & = & g'(1)(x-1) + g(1) \\ y & = & 2(x-1) + 4 \\ y & = & 2x + 2 \end{array}$$

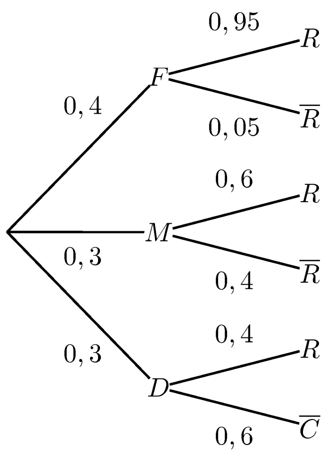
3. L'équation suivante est définie sur $]0;+\infty[\cap]-\dfrac{3}{2};+\infty[$ soit sur $]0;+\infty[$ et

$$\begin{array}{rcl} 2\ln x & = & \ln(2x+3) \\ \ln x^2 & = & \ln(2x+3) \\ x^2 & = & 2x+3 \\ x^2 - 2x - 3 & = & 0 \end{array}$$

et $x^2 - 2x - 3 = 0$ admet $\{-1\ ;\ 3\}$ pour solutions et $-1 \notin]0;+\infty[$ donc l'équation $2\ln x = \ln(2x+3)$ admet 3 pour unique solution.

Exercice 2: 5 points

1. Arbre :



2. a. La probabilité que la grille proposée soit difficile et que Pierre la réussisse est de $0,3 \times 0,4 = 0,12$.
   b. La probabilité que la grille proposée soit facile et que Pierre ne la réussisse pas est de $0,4 \times 0,05 = 0,02$.
   c. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité que Pierre réussisse la grille proposée est :

$$p(R) = p(F\cap R) + p(M\cap R) + p(D\cap R) = 0,4\times 0,95 + 0,6\times 0,4 + 0,12 = 0,38 + 0,24 + 0,12 = 0,68$$

3. Cette probabilité est donnée par $p_{\overline{R}}(M) = \dfrac{p(M\cap\overline{R})}{p(\overline{R})} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$
4. On calcule $p_R(F) = \dfrac{p(F\cap R)}{p(R)} = \dfrac{0,38}{0,68} \simeq 0,56$
   Sa petite sœur a plus d'une chance sur deux d'avoir raison.

Exercice 3: 6 points

1. Pour étudier les variations de cette fonction, on détermine sa dérivée sur $[0;10]$:

$$C'_m(x) = 1 - \frac{16}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 16}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-15}{(x+1)^2}$$

et après calcul du discriminant, $x^2+2x-15=0$ admet pour solutions -5 et 3 donc $C'_m(x)$ admet le tableau de signe suivant :

x	0		3		10
$C'_m(x)$		$-$	0	$+$	

donc la fonction C_m est décroissante sur $[0;3]$ et croissante sur $[3;10]$.

2. Une primitive de C_m est de la forme $\frac{x^2}{2} + 16ln(x+1) + c$ et comme elle doit vérifier $C(0)=0$, on obtient $c=0$ donc

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 16ln(x+1)$$

1. a. L'entreprise doit produire 700 kg de médicaments pour réaliser un bénéfice maximal.
   b. Ce bénéfice est alors de 523 euros.
2. a. $x_0 \in [2,5;3]$
   b. $x_0 \simeq 2,84$