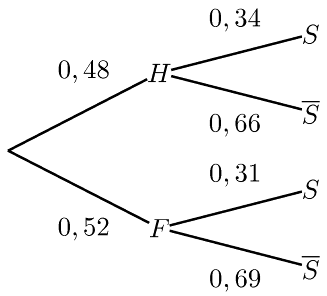
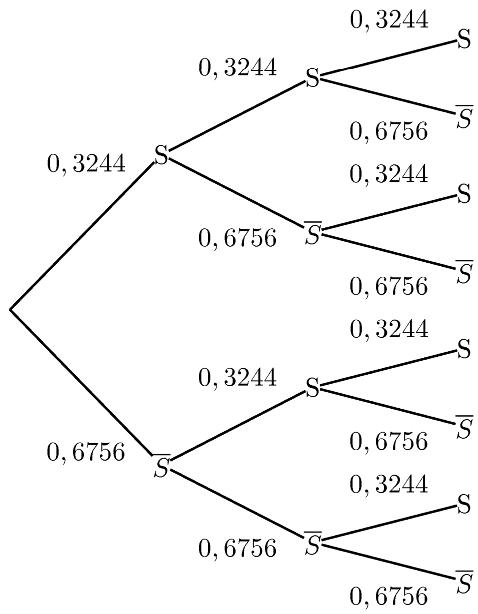
Corrigé du devoir maison 6

Exercice 1: 5 points

1. Arbre :



2. $p(H \cup S) = p(H) \times p_H(S) = 0,48 \times 0,34 = 0,1632$
3. D'après la formule des probabilités totales : $p(H \cup S) = p(H \cup S) + p(F \cup S) = 0,48 \times 0,34 + 0,52 \times 0,31 = 0,3244$
4. $p_S(F) = \dfrac{p(S \cup F)}{p(S)} = \dfrac{0,52 \times 0,31}{0,3244} \simeq 0,497$
5. 

La probabilité qu'au moins deux des trois réponses soient « avoir un système de protection social européen ». est :

$$p(S)^3 + 3 \times p(S)^2 p(\overline{S}) \simeq 0,247$$

Exercice 2: 3 points

1. $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point A$\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2} + \ln 2\right)$. En effet, $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{2x+1}$ et $f'(x) = 0$ pour $x = \dfrac{1}{2}$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \ln 2$
2. La limite de f en $-\dfrac{1}{2}$ est égale à $-\infty$. En effet,

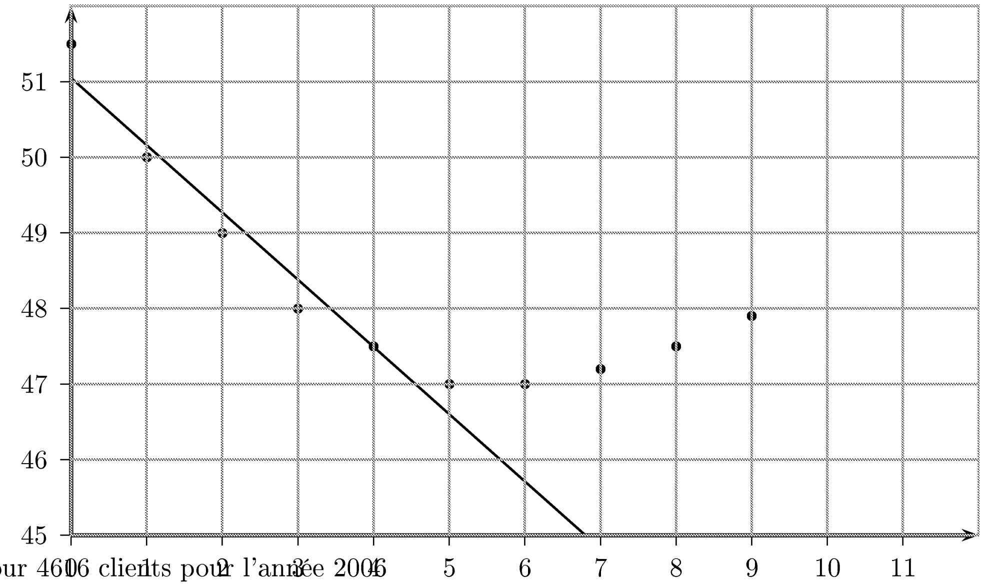
$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}} 2x + 1 = 0 \quad donc \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}} ln(2x+1) = -\infty \quad et \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}} -x + 2 = \frac{5}{2} \quad d'ou \quad \lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = -\infty$$

3. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 5\right[$ est égal à 2. Il suffit d'observer la représentation graphique de la fonction f pour s'en convaincre et d'étudier les variations de la fonction f sur $\left]-\dfrac{1}{2}\ ;\ 5\right[$ pour le démontrer.

Exercice 3: 5 points

Partie A

1. A l'aide de la calculatrice, on obtient : $y = -0,89x + 51,05$
2. Graphique :



3. On prévoir pour 4616 clients pour l'année 2006

$$-0,089 \times 6 + 51,05 = 46,16$$

et 4520 clients pour l'année 2007.

$$-0,089 \times 7 + 51,05 = 45,27$$

Partie B

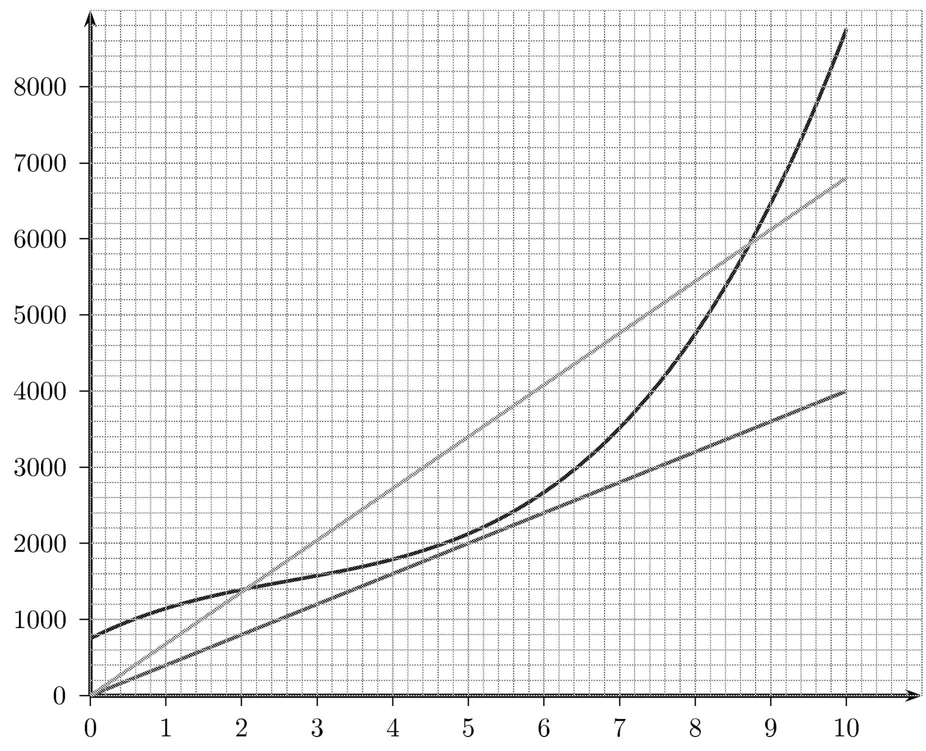
1. a. Voir ci-dessus.
   b. Le modèle d'ajustement trouvé dans la partie A n'est pas pertinent pour la période 2006–2009 puisque le nombre de clients augment continuellement après 2006.
2. a. $f(7) = 2 \times 7 + 15 + \mathrm{e}^{-0,1\times 7+3,6} \simeq 47,2$ Le choix de ce modèle d'évolution est pertinent pour l'année 2007.
   b. D'après ce modèle d'évolution, on peut estimer le nombre de clients qui fréquenteront le restaurant en 2010 à 4846.

$$f(10) \simeq 48,46$$

Exercice 4: 7 points

Partie A : Étude du bénéfice

1. Tracer de D_1 :



La droite d'équation $y = 400x$ est sous la courbe de de fonction C donc l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.

2. a. L'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros pour $x \in [2; 8,7]$.

   b.
$$B(x) = 680x - C(x) = 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750 = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$$
   donc
$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$$

   c. $-45x^2 + 240x + 180$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 300^2$ et $a < 0$ donc B' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		10
$B'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

   avec $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ et $x_2 = 6$. On en déduit que la fonction B est croissante sur $[0; 6]$ et décroissante sur $[6; 10]$. On résume les variations de la fonction B sur $[0; 10]$ dans le tableau de variations ci-dessous :

x	0		6		10
$B(x)$		$\nearrow$	1410	$\searrow$	

   le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum pour 6 kilomètres de tissu fabriqué et il est alors de 1410 euros.

Partie B : Étude du coût moyen

1. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,10]$ on a :
$$C_M(x) = \frac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x}$$
donc
$$\begin{aligned} C'_M(x) &= \frac{(45x^2 - 240x + 500)x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)}{x} \\ &= \frac{45x^3 - 240x^2 + 500x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750}{x} \\ &= \frac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x} \\ &= \frac{30(x^3 - 4x^2 - 25)}{x} \\ &= \frac{30(x-3)(x^2 + x + 5)}{x} \end{aligned}$$
puisque $(x-3)(x^2 + x + 5) = x^3 - 4x^2 - 25$

2. a. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,10]$, $x^2 > 0$ et $x^2 + x + 5 > 0$ puisque $\Delta = -19$ et $a > 0$ donc $C'_M(x)$ est du signe de $(x - 5)$ d'où :

x	0		5		10
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$		$\searrow$	425	$\nearrow$	

   b. Pour 5 kilomètres de tissu produit, le coût moyen de production est minimum et vaut 425 euros le kilomètre. Le coût total de production est lui de 2125 euros.