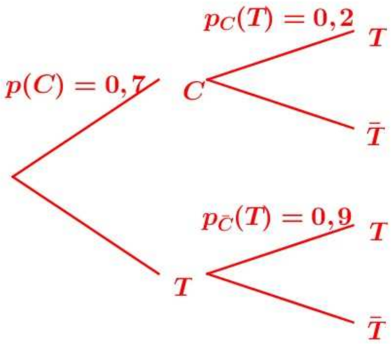
Exercice 1 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité	5 points

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités. 1



2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse. 1

Il faut calculer $p(C \cap T)$

$$p(C \cap T) = p(C) \times p_C(T) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$$

3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé. 1

Il faut calculer $p(T)$

$$p(T) = p(C \cap T) + p(\bar{C} \cap T) = 0,14 + (1 - 0,7) \times 0,9 = 0,14 + 0,3 \times 0,9 = 0,14 + 0,27 = 0,41$$

4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à 27/41. 1

$$Il\ faut\ calculer\ p_T(\bar{C}) = \frac{p(\bar{C} \cap T)}{p(T)} = \frac{0,3 \times 0,9}{0,41} = \frac{0,27}{0,41} = \frac{27}{41}$$

5. Calculer la probabilité que l'heure soit creuse sachant que le terrain n'est pas occupé. 1

$$Il\ faut\ calculer\ p_{\bar{T}}(C) = \frac{p(\bar{T} \cap C)}{p(\bar{T})} = \frac{0,7 \times 0,8}{1 - 0,41} = \frac{0,56}{0,59} = \frac{56}{59} \approx 0,95$$

Exercice 2 Commun à tous les candidats	5 points

Partie A

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison 1.

On sait que $v_{n+1} = u_{n+1} - 12$, donc $v_{n+1} = 0,9\ u_n + 1,2 - 12 = 0,9\ u_n - 10,8$

Or $v_n = u_n - 12$, donc $u_n = v_n + 12$

Donc $v_{n+1} = 0,9\ (v_n + 12) - 10,8 = 0,9\ v_n + 10,8 - 10,8 = 0,9\ v_n$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison 0,9

Son premier terme v_0 est égal à $u_0 - 12 = 10 - 12 = -2$.

b. Exprimer v_n en fonction de n. 0,5

On sait que $v_n = v_0 \times q^n$

On en conclut que $v_n = -2 \times 0,9^n$

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$. 0,5

Comme $u_n = v_n + 12$, on en conclut que $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$

2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n). 2×0,25

$$On\ sait\ que\ \lim_{n \to \infty} (0,9)^n = 0, donc\ \lim_{n \to \infty} (v_n) = 0\ et\ \lim_{n \to \infty} (u_n) = 12$$

Partie B

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année 2012+n. 0,5

Tous les ans 10% des habitants partent donc la population est multipliée par 0,9 mais 1200 nouveaux habitants arrivent donc il faut rajouter 1,2 (en milliers)

On a donc $u_{n+1} = 0,9\ u_n + 12$

2. *Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année 2012+n.* *0,5*

```
VARIABLES
a, i ,n.
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n
a prend la valeur 0,9×a+12
SORTIE
Afficher a
```

3. *a. Résoudre l'inéquation 12−2×0,9^n > 11,5.* *1*

$$12-2\times 0{,}9^n>11{,}5 \Leftrightarrow -2\times 0{,}9^n>11{,}5-12 \Leftrightarrow -2\times 0{,}9^n>-0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}9^n<\frac{-0{,}5}{-2} \Leftrightarrow 0{,}9^n<0{,}25$$

$$0{,}9^n<0{,}25 \Leftrightarrow \ln(0{,}9^n)<\ln 0{,}25 \Leftrightarrow n\ln 0{,}9<\ln 0{,}25 \Leftrightarrow n>\frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}9} \Leftrightarrow n>13{,}15$$

$$donc\ 12-2\times 0{,}9^n>11{,}5 \Leftrightarrow n\geq 14$$

b. En donner une interprétation. *0,5*

Cela signifie que la population va dépasser 11 500 habitants dans 14 ans.

EXERCICE 3 Commun à tous les candidats	*4 points*

1. *Pour tout réel a non nul, le nombre réel* $e^{-\frac{1}{a}}$ *est égal à :*

$a.\ -e^{\frac{1}{a}}$ $\quad$ $\boxed{b.\ \frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}}$ $\quad$ $c.\ \frac{1}{e^{a}}$ $\quad$ $d.\ e^{a}$

$$On\ sait\ que\ e^{-x}=\frac{1}{e^x}\ donc\ e^{-\frac{1}{a}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$$

2. *Pour tout réel a, le nombre réel* $e^{\frac{a}{2}}$ *est égal à :*

$\boxed{a.\ \sqrt{e^a}}$ $\quad$ $b.\ \frac{e^a}{2}$ $\quad$ $c.\ \frac{e^a}{e^2}$ $\quad$ $d.\ e^{\sqrt{a}}$

$$On\ sait\ que\ e^{\frac{a}{2}}=(e^a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e^a}$$

3. *Pour tout réel* $x<0$, *le nombre réel* $\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ *est égal à :*

$a.\ \ln(x)$ $\quad$ $\boxed{b.\ -\ln(-x)}$ $\quad$ $c.\ -\ln(x)$ $\quad$ $d.\ \frac{1}{\ln(-x)}$

$$Comme\ x<0,\ \ln\left(-\frac{1}{x}\right)=\ln\left(\frac{1}{-x}\right)=\ln 1-\ln(-x)=-\ln(-x)$$

4. *On donne la fonction f définie sur l'intervalle* $]0\,;+\infty[$ *par* $f(x)=x\ln(x)$

La dérivée de f est définie sur $]0\,;+\infty[$ *par :*

$a.\ f'(x)=1$ $\quad$ $b.\ f'(x)=\ln(x)$ $\quad$ $c.\ f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad$ $\boxed{d.\ f'(x)=\ln(x)+1}$

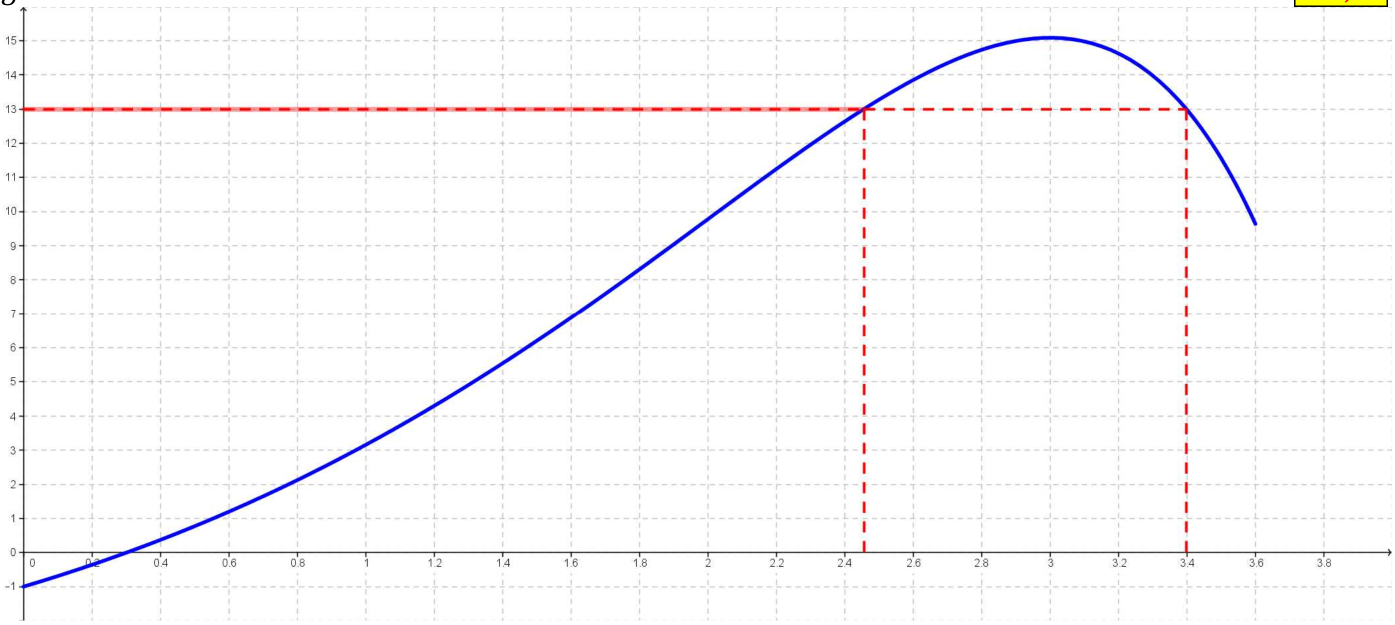
$$f\ est\ de\ la\ forme\ u\times v\ avec\ u=x\ donc\ u'=1\ et\ v=\ln x\ \ donc\ v'=\frac{1}{x}$$

$$f'est\ donc\ de\ la\ forme\ u'v+v'u=\ln x+\frac{1}{x}\times x=\ln x+1$$

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats	6 points

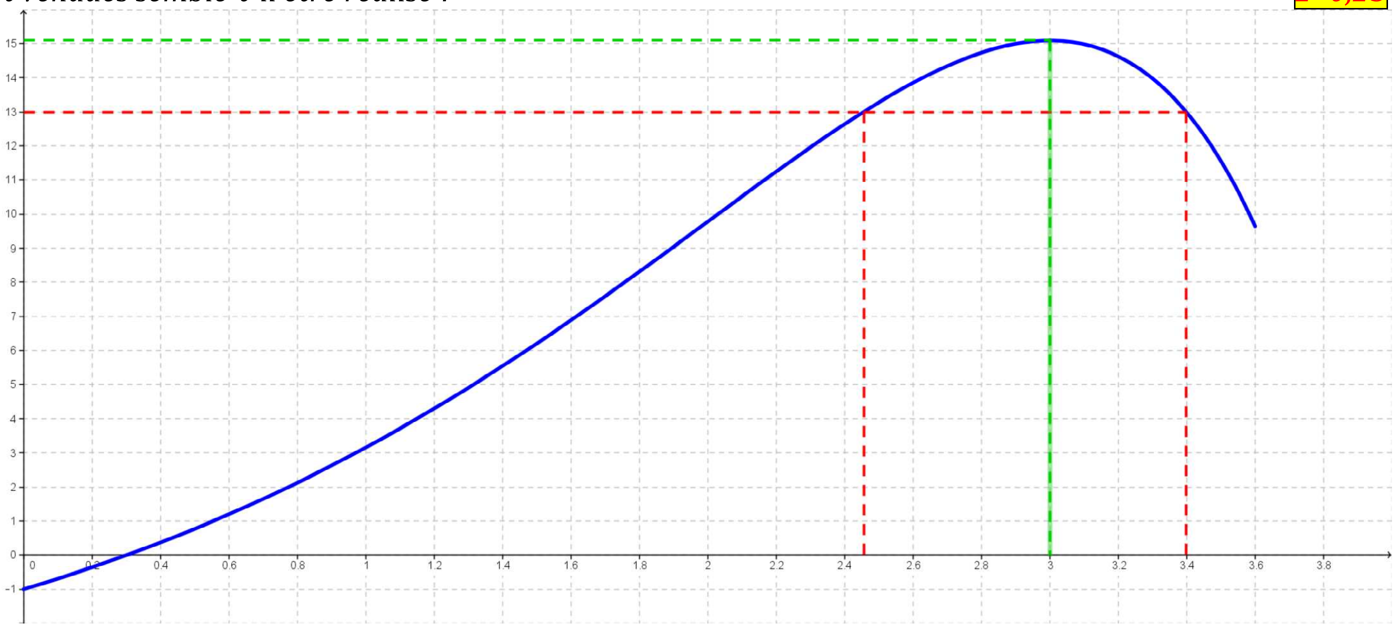
Partie A : étude graphique

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros. *2×0,25*



Graphiquement, on voit que le bénéfice dépasse 13 000 € pour une production comprise entre environ 2450 et 3400 unités

2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ? Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ? *2×0,25*



Graphiquement, on voit que le bénéfice maximal dépasse 15 000 € pour une production d'environ 3000 unités

Partie B : étude théorique

1. a. On note B' la fonction dérivée de la fonction B. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0\,;\,3{,}6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)e^x$. *0,5*

$$B(x) = -5 + (4 - x)e^x$$

- *Calcul de la dérivée de* -5 : *C'est* 0.
- *Calcul de la dérivée de* $(4 - x)e^x$.

$$Cette\ formule\ est\ de\ la\ forme\ u \times v\ avec\ u = 4 - x\ donc\ u' = -1\ et\ v = e^x\ donc\ v' = e^x.$$

$$La\ dérivée\ est\ donc\ de\ la\ forme\ u'v + v'u\ soit\ -1 \times e^x + e^x(4 - x) = e^x(-1 + 4 - x) = e^x(3 - x)$$

$$On\ a\ donc\ B'(x) = (3 - x)e^x.$$

b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I. 0,5

x	0		3		3,6
$3-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$B'(x)$		$+$	0	$-$	

c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I. On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle. 0,5+3×0,5

$$B(x) = -5 + (4-x)e^x \text{ donc } B(0) = -5 + (4-0)e^0 = -5 + 4 = -1$$

$$B(3) = -5 + (4-3)e^3 = -5 + 1 \times e^3 = e^3 - 5 \approx 15{,}09$$

$$B(3{,}6) = -5 + (4-3{,}6)e^{3{,}6} B(x) = -5 + 0{,}4 \times e^{3{,}6} \approx 9{,}64$$

x	0		3		3,6
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	-1	$\nearrow$	$\approx 15{,}09$	$\searrow$	$\approx 9{,}64$

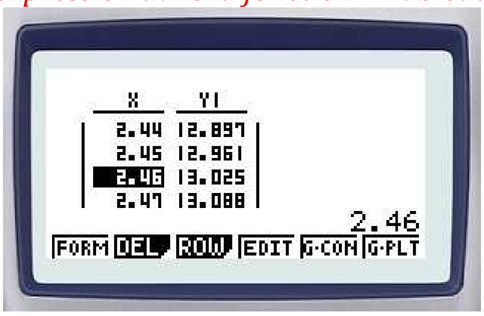
2. a. Justifier que l'équation B (x) = 13 admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle [0 ; 3] l'autre dans l'intervalle [3 ; 3,6]. 2×0,,5

On sait que $B(0) = -1$ *et que* $B(3) \approx 15{,}09$. *B est continue et strictement croissante sur* $[0;3]$. $13 \in]-1;15{,}09[$ *donc il existe un nombre unique* $x_1 \in]0;3[$ *tel que* $B(x_1) = 13$.

On sait que $B(3{,}6) \approx 9{,}64$ *et que* $B(3) \approx 15{,}09$. *B est continue et strictement décroissante sur* $[3;3{,}6]$. $13 \in]9{,}64:15{,}09[$ *donc il existe un nombre unique* $x_2 \in]3;3{,}6[$ *tel que* $B(x_2) = 13$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions. 2×0,5

En mettant l'expression dans la fonction « Tableau de valeur » de la calculatrice, on obtient



On voit donc que $x_1 \approx 2{,}46$ *et* $x_2 \approx 3{,}40$.