BACCALAURÉAT BLANC GÉNÉRAL

Vendredi 29 mars 2013

Epreuve de MATHEMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le sujet comporte 10 pages

<u>Chaque élève doit faire quatre exercices</u>

Les élèves qui ont choisi Math en spécialité doivent faire les exercices n°1, 2, 3 et 5

Les élèves qui n'ont pas choisi Math en spécialité doivent faire les exercices n°1, 2, 3 et 4.

Exercice 1 *(5 points)* *COMMUN A TOUS LES CANDIDATS*

Une université fait passer un test à ses étudiants. À l'issue du test chaque étudiant est classé dans l'un des trois profils A, B et C définis ci-dessous.

50 % des étudiants ont le profil A : ils mémorisent mieux une information qu'ils voient (image, diagramme, courbe, film ...).

20 % des étudiants ont le profil B : ils mémorisent mieux une information qu'ils entendent.

30 % des étudiants ont le profil C : ils mémorisent aussi bien l'information dans les deux situations.

À la fin de la session d'examen de janvier on constate que

70 % des étudiants ayant le profil A ont une note supérieure ou égale à 10,

75 % des étudiants ayant le profil B ont une note supérieure ou égale à 10,

85 % des étudiants ayant le profil C ont une note supérieure ou égale à 10.

On choisit de manière aléatoire un étudiant de cette université. On note

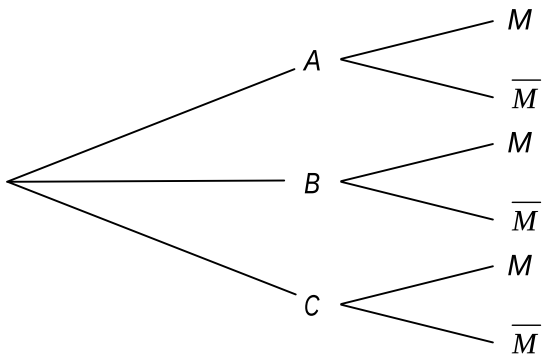
A l'évènement « l'étudiant a le profil A »,

B l'évènement « l'étudiant a le profil B »,

C l'évènement « l'étudiant a le profil C »

M l'évènement « l'étudiant a une note supérieure ou égale à 10 » et $\overline{M}$ *l'évènement contraire.*

1. *Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :*



Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondie au millième.

2. *Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit de profil C et qu'il ait obtenu une note supérieure ou égale à 10.*
3. *Démontrer que p(M) = 0,755.*
4. *Calculer la probabilité que l'étudiant soit de profil B sachant qu'il a obtenu une note strictement inférieure à 10.*
5. *On choisit dix étudiants au hasard. On admet que le nombre d'étudiants est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à dix tirages successifs indépendants avec remise. Calculer la probabilité que plus de trois étudiants soient du profil C.*

Exercice 2 *(5 points)* *COMMUN A TOUS LES CANDIDATS*

A la naissance de Jim, ses parents décident de lui ouvrir un livret d'épargne avec une somme de 1000€ et qui rapporte 2 % d'intérêt par an et à chaque anniversaire de Jim ses parents lui ajoutent 500 € sur son livret. On appelle u_n la somme que Jim aura en tout sur son livret pour son $n^{ème}$ anniversaire.

Ainsi, on a $u_0 = 1000$ € et $u_1 = 1520$ €.

1. *Calculer u_2 et u_3.*
2. *Justifier pourquoi $u_{n+1} = 1{,}02u_n + 500$.*
3. *Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + 25\,000$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ? quel est son premier terme v_0 ?*
4. *Exprimer v_n en fonction de n.*
5. *En déduire une expression de u_n en fonction de n.*
6. *Si tout se passe comme prévu, quelle somme d'argent Jim aura sur son compte pour son 25ème anniversaire ?*

Exercice 3 *(5 points)* *COMMUN A TOUS LES CANDIDATS*

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x},\ \ g(x) = -x + 1 \ \text{ et } \ h(x) = f(x) - g(x).$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f et D la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A : *Position relative de C_f et de l'une de ses tangentes.*

1. *Vérifier, par le calcul, que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est la droite D.*
2. *a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, h'(x) = 1 - e^{-x}$.*
   b) Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
3. *En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point d'abscisse 0.*

Partie B : *Calcul d'aire*

1. *Montrer que :*

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation. Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en **annexe**. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D. Déterminer en fonction de a la valeur de A.*

Exercice 4 *(5 points)* *CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE*

Une minoterie commercialise de la farine en sachets. La variable aléatoire X qui, à chaque sachet tiré au hasard associe son poids en grammes suit la loi normale $\mathcal{N}(1000{,}625)$.

1. *Expliquer pourquoi on peut connaître sans calculatrice la probabilité qu'un sachet pèse entre 1000 et 1025 grammes.*
2. *Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité qu'un sachet pèse plus de 1050 grammes ?*
3. *Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité que le poids d'un sachet soit compris entre 990 et 1035 grammes ?*
4. *Déterminer à l'unité près l'entier k tel que $p(X < k) = 0{,}05$. En déduire le poids du sachet qui est tel que 5% des sachets fabriqués soient plus légers que lui.*
5. *Quel est le poids minimal d'un sachant qui fait partie des 10% les plus lourds ?*

Exercice 5 *(5 points)* *CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE*

Sur le graphe n°1 de l'annexe, les sept sommets A, B, C, D, E, F et G correspondent à sept villes. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une liaison entre les deux villes correspondantes.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

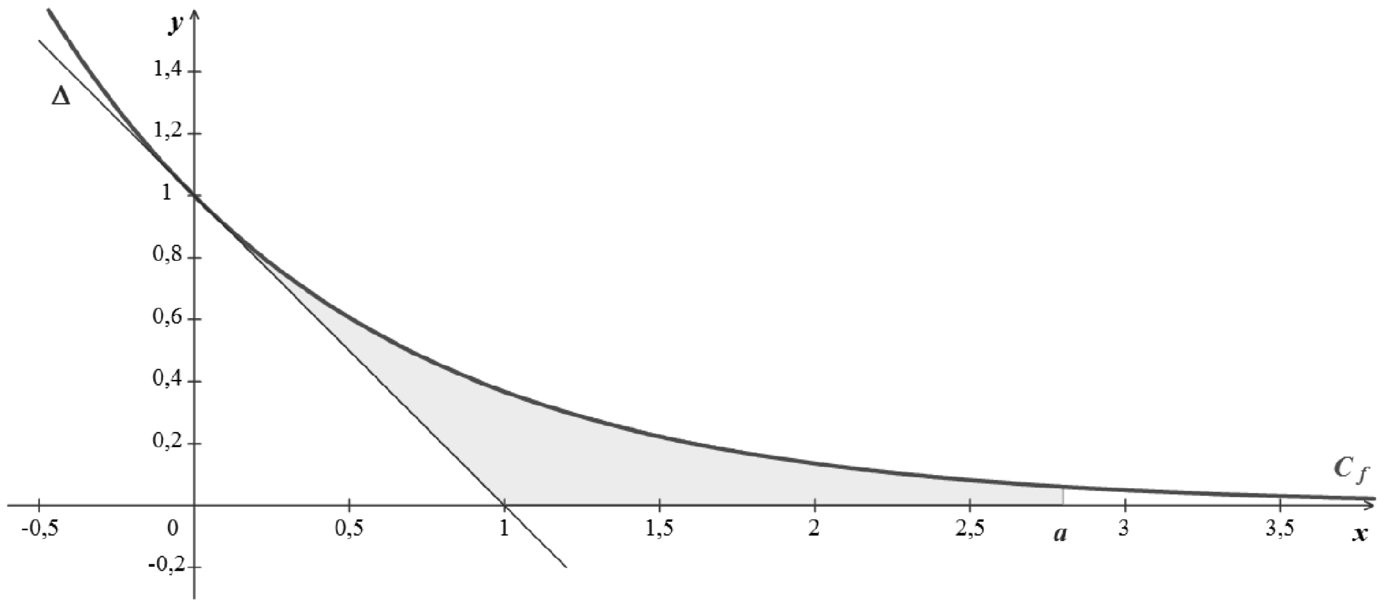
1. *Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ? Si oui, montrer un de ces trajets, sinon prouver que ce n'est pas possible.*
2. *Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F. Les citer tous.*
3. *On donne ci-dessous et sur le graphe n°2 de l'annexe les distances exprimées en centaines de kilomètres entre deux villes pour lesquelles il existe une liaison :*

   AB : 5 ; AC : 7 ; BD : 8 ; BE : 15 ; BG : 6 ; CD : 10 ; CE : 15 ; DF : 20 ; DG : 10 ; EF : 5

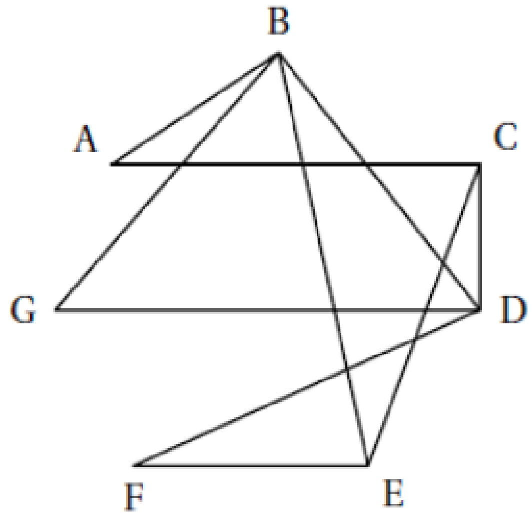
   Un représentant de commerce souhaite aller de la ville A à la ville F. En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.

ANNEXE

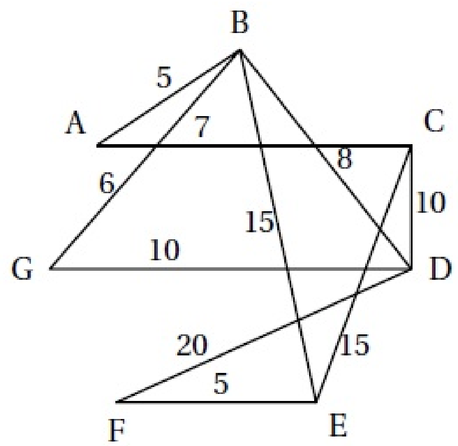
Graphique exercice 3 :



Premier graphe de l'exercice n°5



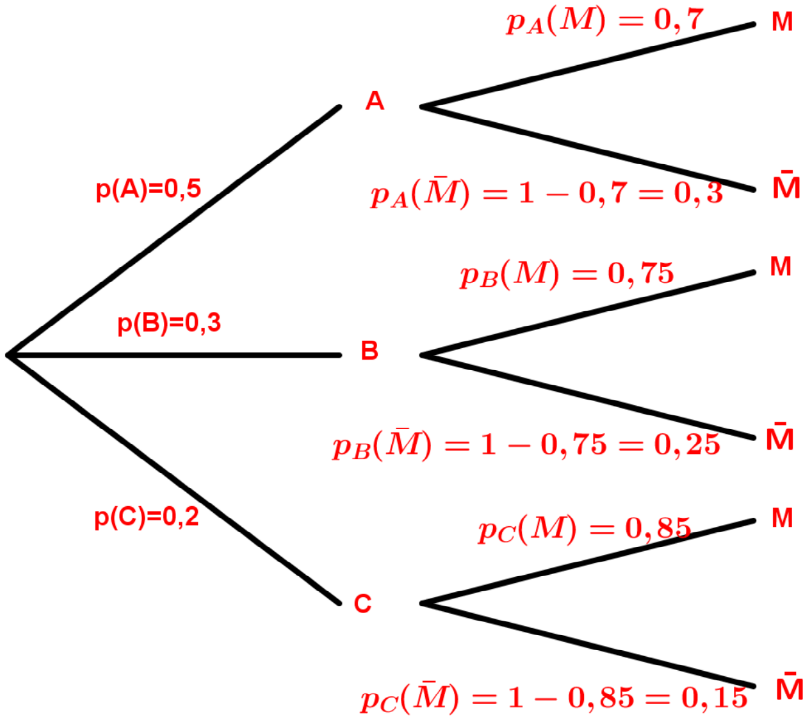
Deuxième graphe de l'exercice n°5



CORRIGÉ du Devoir en classe n°8 (Bac Blanc)

exercice 1   (5 points)   **COMMUN A TOUS LES CANDIDATS**

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant pour qu'il traduise les données de l'expérience aléatoire décrite dans l'énoncé :



Dans la suite de l'exercice les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondie au millième.

2. Calculer la probabilité que l'étudiant choisi soit de profil C et qu'il ait obtenu une note supérieure ou égale à 10.

$$p(C \cap M) = p(C) \times p_C(M) = 0,3 \times 0,85 = 0,255$$

3. Démontrer que p(M) = 0,755.

D'après la formule des probabilités totales,

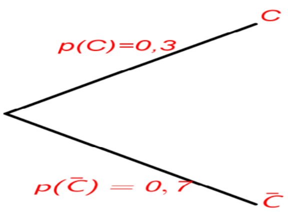
$$p(M) = p(A \cap M) + p(B \cap M) + p(C \cap M) = 0,5 \times 0,7 + 0,2 \times 0,75 + 0,255$$

$$donc\ p(M) = 0,350 + 0,150 + 0,255 = 0,755$$

4. Calculer la probabilité que l'étudiant soit de profil B sachant qu'il a obtenu une note strictement inférieure à 10.

$$p_{\bar{M}}(B) = \frac{p(B \cap \bar{M})}{p(\bar{M})} = \frac{0,2 \times 0,25}{1 - 0,755} = \frac{0,050}{0,245} = \frac{50}{245} = \frac{10}{49} \approx 0,204$$

4. On choisit dix étudiants au hasard. On admet que le nombre d'étudiants est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilé à dix tirages successifs indépendants avec remise. Calculer la probabilité que plus de trois étudiants soient du profil C.



Ceci est une épreuve de Bernouilli. On répète cette épreuve 10 fois de manière indépendante. X est le nombre d'élèves de la catégorie C. X suit la loi binomiale de paramètres 10 et 0,3

D'après la calculatrice, on trouve que $p(X \leq 3) \approx 0,6496$

$$donc\ p(X > 3) \approx 1 - 0,6496 \approx 0,3504 \approx 0,350$$

exercice 2 (5 points) ***COMMUN A TOUS LES CANDIDATS***

1. Calculer u_2 et u_3.

$$u_2 = 1520 \times 1{,}02 + 500 = 2\,050{,}40€$$
$$u_3 = 2050{,}4 \times 1{,}02 + 500 = 2591{,}41€$$

2. Justifier pourquoi $u_{n+1} = 1{,}02u_n + 500$.

Chaque année, il y a 2% d'intérêt, donc il faut multiplier la somme par 1,02 puis rajouter 500€,

$$donc\ on\ a\ bien\ u_{n+1} = 1{,}02u_n + 500.$$

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n + 25\,000$. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ? quel est son premier terme v_0 ?

$$v_n = u_n + 25\,000\ donc\ v_{n+1} = u_{n+1} + 25\,000 = 1{,}02u_n + 500 + 25\,000 = 1{,}02u_n + 25\,500$$
$$or\ u_n = v_n - 25\,000\ donc\ v_{n+1} = 1{,}02(v_n - 25\,000) + 25\,500 = 1{,}02v_n - 25\,500 + 25\,500$$
$$donc\ v_{n+1} = 1{,}02v_n$$
$$v_0 = u_0 + 25\,000 = 1\,000 + 25\,000 = 26\,000$$
$$(v_n)\ est\ donc\ une\ suite\ géométrique\ de\ premier\ terme\ v_0 = 26\,000\ et\ de\ raison\ q = 1{,}02.$$

4. Exprimer v_n en fonction de n.

$$(v_n)\ est\ donc\ une\ suite\ géométrique\ de\ premier\ terme\ v_0 = 26\,000\ et\ de\ raison\ q = 1{,}02.$$
$$donc\ v_n = v_0 \times q^n = 26\,000 \times 1{,}02^n$$

5. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

$$u_n = v_n - 25\,000\ donc\ u_n = 26\,000 \times 1{,}02^n - 25\,000$$

6. Si tout se passe comme prévu, quelle somme d'argent Jim aura sur son compte pour son 25ème anniversaire ?

$$u_{25} = 26\,000 \times 1{,}02^{25} - 25\,000 = 17\,655{,}76$$

Le jour de son 25ème anniversaire, il aura sur son compte 17 655,76€

exercice 3 (5 points) ***COMMUN A TOUS LES CANDIDATS***

Partie A : *Position relative de C_f et de l'une de ses tangentes.*

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est la droite D.

$$La\ tangente\ a\ pour\ équation\ y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

- *Calcul de $f'(x)$*
  Si on pose $u(x) = -x, f\ est\ de\ la\ forme\ e^u\ et\ on\ sait\ que\ la\ dérivée\ de\ e^u\ est\ u' \times e^u$
  $$or\ u'(x) = -1, donc\ f'(x) = -1 \times e^{-x} = -e^{-x}$$
- *Calcul de f(0).*
  $$f(0) = e^{-0} = e^0 = 1$$
- *Calcul de $f'(0)$*
  $$f'(0) = -e^{-0} = -1$$

$$donc\ la\ tangente\ à\ C_f\ au\ point\ d'abscisse\ 0\ a\ pour\ équation\ y = -1(x - 0) + 1 = -x + 1$$
$$la\ droite\ D\ est\ donc\ bien\ la\ tangente\ à\ C_f\ au\ point\ d'abscisse 0.$$

2. a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, h^{'}(x) = 1 - e^{-x}$.

$$h(x) = f(x) - g(x)\ donc\ h^{'}(x) = f^{'}(x) - g^{'}(x) = -e^{-x} - (-1) = 1 - e^{-x}$$

b) Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

$$h^{'}(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -1 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$donc\ h^{'}(x)\ est\ positif\ si\ x\ est\ positif\ et\ négatif\ si\ x\ est\ négatif$$

c) En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

$$h(0) = e^{-0} - (-0 + 1) = 1 - 1 = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h^{'}(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	$h(0) = 0$	↗	

3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe C_f et de sa tangente au point d'abscisse 0.

D'après le tableau précédent, on voit que h est toujours positive, donc $h(x) \geq 0\ donc\ f(x) \geq g(x)$

Cela signifie donc que la courbe C_f est au-dessus de la tangente D.

<u>Partie B</u> : Calcul d'aire

1. Montrer que :

$$\int_0^1 h(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

- Calcul des primitives F de f

  On sait que les primitives de $u^{'}e^{u}$ sont de la forme $e^{u} + c$

  $$Si\ on\ pose\ u(x) = -x\ alors\ u^{'}(x)$$
  $$= -1\ donc\ les\ primitives\ de - e^{-x}\ sont\ de\ la\ forme\ e^{-x} + c$$
  $$f(x) = e^{-x} = -1 \times (-e^{-x})\ donc\ F(x) = -e^{-x} + c$$

- Calcul des primitives G de g

  $$g(x) = -x + 1\ donc\ G(x) = -\frac{x^2}{2} + x + c$$

- Calcul des primitives H de h

  $$H(x) = F(x) - G(x) = -e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + c$$

  $$H(1) = -e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 + c = -\frac{1}{e} - \frac{1}{2} + c\ \ et\ H(0) = -e^{-0} + c = -1 + c$$

  $$donc\ \int_0^1 h(x)\,dx = H(1) - H(0) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$$

2. Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique en **annexe**. On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D. Déterminer en fonction de a la valeur de A.

L'aire du triangle formé par les axes et la droite D est égale à 0,5

$$Il\ faut\ donc\ calculer\ \int_0^a f(x)\,dx - 0{,}5 = F(a) - F(0) - 0{,}5 = -e^{-a} — e^{0} - 0{,}5$$
$$= -e^{-a} + 0{,}5$$

$$donc\ A = 0{,}5 - \frac{1}{e^a}$$

exercice 4 (5 points) **CANDIDATS N'AYANT PAS SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

1. Expliquer pourquoi on peut connaître sans calculatrice la probabilité qu'un sachet pèse entre 1000 et 1025 grammes.

$$\sigma^2 = 625,\ donc\ \sigma = 25.$$

On sait que la probabilité que X soit comprise entre $1000 - 25$ et $1000 + 25$ est environ égale à 0,68

$$donc\ p(1000 < X < 1025) \approx \frac{0{,}68}{2} \approx 0{,}34$$

(d'ailleurs si on prend la calculatrice, on trouve 0,34134)

2. Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité qu'un sachet pèse plus de 1050 grammes ?

$$p(X > 1050) = 0{,}5 - p(1000 < X < 1050) \approx 0{,}5 - 0{,}47724 \approx 0{,}02276 \approx 0{,}0228$$

3. Quelle est, à 10^{-4} près, la probabilité que le poids d'un sachet soit compris entre 990 et 1035 grammes.

La calculatrice donne directement la réponse $p(990 < X < 1035) \approx 0{,}57466 \approx 0{,}5747$.

4. Déterminer à l'unité près l'entier k tel que $p(X < k) = 0{,}05$. En déduire le poids du sachet qui est tel que 5% des sachets fabriqués soient plus légers que lui.

Il faut utiliser la touche Inverse Normal de la calculatrice

On trouve $p(X < 958{,}87) \approx 0{,}05$

Donc 5% des sachets ont un poids inférieur à 959 grammes.

5. Quel est le poids minimal d'un sachant qui fait partie des 10% les plus lourds ?

Il faut utiliser la touche Inverse Normal de la calculatrice

On trouve $p(X < 1032) \approx 0{,}90$

Donc 10% des sachets ont un poids supérieur à 1032 grammes.

exercice 5 (5 points) **CANDIDATS AYANT SUIVI L'ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE**

1. Est-il possible de trouver un trajet, utilisant les liaisons existantes, qui part d'une des sept villes et y revient en passant une fois et une seule fois par toutes les autres villes ? Si oui, montrer un de ces trajets, sinon prouver que ce n'est pas possible.

Il suffit de chercher le degré de chaque sommet

A	B	C	D	E	F	G
2	4	3	4	3	2	2

Il y a 2 sommets de degré impair, donc il existe un chemin eulérien : il faut qu'il aille de C vers E ou de E vers C. C A B D F E B G D C E est un exemple de trajet qui répond à cette question.

2. *Donner le nombre de chemins de longueur 3 qui relient le sommet A au sommet F. Les citer tous.*

Si on note le sommets dans l'ordre alphabétique, la matrice correspondant à ce graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. On\ a\ M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 9 & 9 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 1 & 8 & 8 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 10 & 1 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 8 & 9 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 6 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On voit qu'il y a 4 chemins de longueur 3 qui vont de A à F. Ces chemins sont

A B D F   A C D F   A B E F   A C E F

3. *En expliquant la méthode utilisée, déterminer le trajet qu'il doit suivre pour que la distance parcourue soit la plus courte possible et donner cette distance.*

Il faut utiliser l'algorithme de Dijkstra

A	B	C	D	E	F	G	
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	5 A	7 A	∞	∞	∞	∞	B
		7 A	13 B	20 B	∞	11 B	C
			13 B	20 B	∞	11 B	G
			13 B	20 B	∞		D
				20 B	33 D		E
					25 E		F

Le chemin le plus court pour aller de A vers F est donc A B E F pour un total de 25 centaines de km, donc la distance minimale est de 2 500 kilomètres