Loi normale centrée réduite

Exercice 1:

Une urne contient des boules blanches et des boules noires avec une proportion $p = 0,4$ de boules blanches. On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard une boule dans cette urne, on note sa couleur, puis on remet la boule dans l'urne.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule noire lors du tirage.
2. On répète 100 fois cette expérience aléatoire et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.
   c. Déterminer la probabilité d'obtenir (on arrondira à 10^{-3}) :
      - exactement 39 boules blanches ;
      - au moins 10 boules blanches ;
      - entre 20 et 45 boules blanches ;

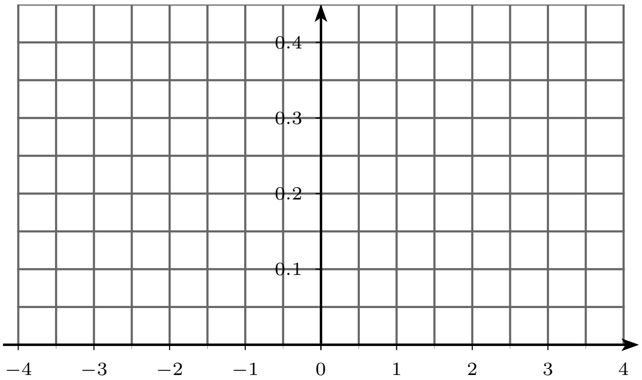
   d. Vérifier vos résultats à l'aide du logiciel GeoGebra.
   e. A l'aide de ce même logiciel, on va représenter le diagramme en bâton de la variable aléatoire X. Pour cela, entrer dans la barre de saisie la formule suivante :
   `Barres[0,100,Séquence[Combinaison[100,k]*0.4^k*0.6^(100-k),k,0,100]`
3. On cherche une fonction continue dont la courbe s'ajuste à l'histogramme. Pour cela on va « déplacer »l'histogramme à l'aide du changement suivant :
$$Z = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$
   a. Déterminer $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ pour $X = 0$ et $X = 100$.
   b. Entrer dans la barre de saisie la formule suivante :
   `Barres[-40/sqrt(24), 60/sqrt(24),Séquence[sqrt(24)*Combinaison[100,k]*0.4^k*0.6^(100-k),k,0,100]`
   c. Tracer la courbe de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Que remarque-t-on ?
4. On va finalement utiliser f pour calculer la probabilité d'obtenir entre 20 et 45 boules blanches.
   a. Prouver que $P(20 \leq X \leq 45) = P(19,5 \leq X \leq 45,5) = P(-4,2 \leq Z \leq 1,1)$.
   b. En déduire que cette probabilité peut-être calculer par une intégrale puis déterminer cette intégrale à l'aide du logiciel.
5. On peut faire le même travail pour des valeurs de p et n différentes.
   Pour l'observer, créer des curseurs n et p avec $n \in [0; 300]$ et $p \in [0; 1]$. Créer ensuite la variable s égale à $\sqrt{np(1-p)}$ puis entrer dans la barre de saisie la formule suivante :
   `Barres[-n*p/s,(n-n*p)/s,Séquence[s*Combinaison[n,k]*p^k*(1-p)^(n-k),k,0,n]]`

Définition:
Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ si X admet pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Exercice 2:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. On va déterminer dans cette exercice quelques propriétés de la fonction f qui vont nous donner des informations sur la variable aléatoire X :

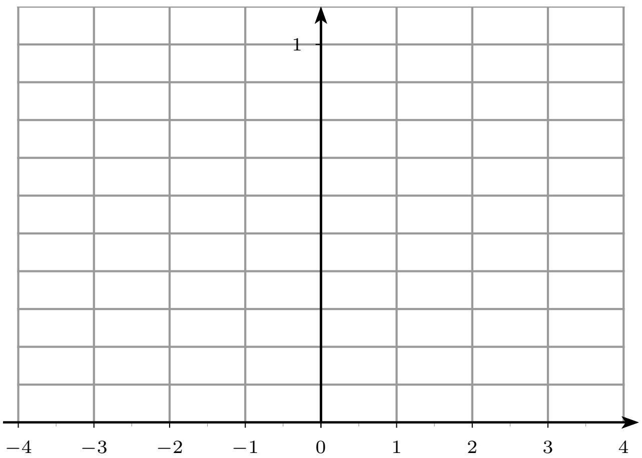
1. Tracer la courbe de la fonction f dans le repère ci-dessous :



2. Montrer que f est bien une densité (On vérifiera à la calculatrice que l'aire sous la courbe de la fonction f est égale à 1).
3. Montrer que la fonction f est paire.
4. En déduire $P(X \geq 0)$ et $P(X \leq 0)$.
5. Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = P(X \leq x)$. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de votre calculatrice :

x	-3	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$\phi(x)$											

6. Tracer la courbe de la fonction Φ dans le repère ci-dessous :



Φ s'appelle la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

7. Déterminer $P(-1 < X < 1)$, $P(-2 < X < 2)$ et $P(-3 < X < 3)$.

Exercice 3:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ et α un nombre réel positif. Déterminer une valeur approché de α tel que $P(-\alpha \leq X \leq \alpha) \simeq 0,95$

Exercice 4:

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ et β un nombre réel positif. Déterminer une valeur approché de β tel que $P(-\beta \leq X \leq \beta) \simeq 0,99$