Chapitre 1: Suites

1 Suites géométriques

1.1 Définition

Définition:
Une suite (u_n) *est géométrique s'il existe un nombre réel* q *tel que pour tout entier naturel* n*,*

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q *est appelé raison de la suite* (u_n)*.*

Propriété:
Soit (u_n) *une suite géométrique de raison* q *alors pour tout entier naturel* n*,*

$$u_n = q^n u_0$$

et pour tout entier naturel p*,*

$$u_n = q^{n-p} u_p$$

Exemple:
Si l'on considère la suite géométrique de raison 2 *et de premier terme* $u_0 = \frac{1}{4}$*, alors*

$$u_1 = 2 \times u_0 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

De plus,

$$u_6 = 2^6 \times u_0 = 64 \times \frac{1}{4} = 16$$

1.2 Variations

Théorème:
La suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ *et de raison* q *est :*

- *strictement croissante si* $q > 1$ *;*
- *strictement décroissante si* $0 < q < 1$ *;*
- *ni croissante ni décroissante si* $q < 0$*.*

1.3 Somme des termes

Théorème:
Pour $q \neq 1$*,*

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Théorème:
Soit (u_n) *une suite géométrique de raison* q*,* $q \neq 1$*, alors pour tout entier naturel* n*,*

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1.4 Limite

Théorème:

- *Si* $q > 1$*,* $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- *Si* $q = 1$*,* $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$
- *Si* $0 < q < 1$*,* $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$

2 Suites arithmético-géométriques

Définition:
Une suite (u_n) *est arithmético-géométrique s'il existe des nombres réels* a *et* b *tels que pour tout entier naturel* n,

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Exemple:
Si l'on considère la suite arithmético-géométrique définie par $u_0 = 3$ *et* $u_{n+1} = -2u_n + 3$ *alors*

$$u_1 = -2u_0 + 3 = -2 \times 3 + 3 = -3$$