

## Chapitre 2: Probabilités conditionnelles

### 1 Définition et première propriété

#### Définition:

On suppose  $P(B) \neq 0$ . La probabilité de  $A$  sachant  $B$  noté  $P_B(A)$  est définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

#### Propriété:

On suppose  $P(A) \neq 0$  et  $P(B) \neq 0$ .

- $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$  ;
- $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ .

#### Démonstration:

Le premier point découle immédiatement de la définition.

De plus,  $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$  donc  $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ .

### 2 Exemple avec un arbre pondéré

On teste l'efficacité d'un médicament sur un échantillon d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé. Dans cette expérimentation, 60% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent un placebo.

On étudie la baisse du taux de glycémie après l'expérimentation.

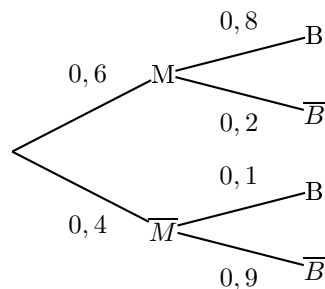
On constate une baisse de ce taux chez 80% des individus ayant pris le médicament ; on ne constate aucune baisse pour 90% des personnes ayant pris le placebo.

On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des personnes ayant participé à l'expérience.

On appelle :

- $M$  l'événement « l'individu a pris le médicament » ;
- $B$  l'événement « l'individu a une baisse de son taux de glycémie ».

L'énoncé permet d'obtenir l'arbre pondéré suivant :



La probabilité que l'individu a une baisse de son taux de glycémie **sachant qu'il** a pris le médicament est :

$$P_M(B) = 0,8$$

La probabilité que l'individu a une baisse de son taux de glycémie **et** a pris le médicament est :

$$P(M \cap B) = P(M) \times P_M(B) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

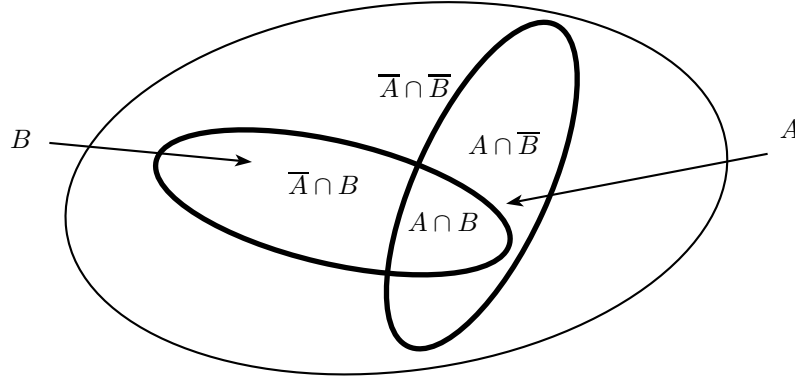
### 3 Formule des probabilités totales

**Propriété:**

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B}).$$

**Démonstration:**

D'après le schéma ci-dessous,  $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$  avec  $(A \cap B)$  et  $(A \cap \overline{B})$  incompatibles.



On en déduit que :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

De plus,  $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$  et  $P(A \cap \overline{B}) = P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$  donc

$$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\overline{B}}(A) \times P(\overline{B})$$

**Exemple:**

Dans l'exemple précédent, la probabilité que l'individu a une baisse de son taux de glycémie est :

$$P(B) = P(B \cap M) + P(B \cap \overline{M}) = P(M) \times P_M(B) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(B) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,1 = 0,48 + 0,04 = 0,52$$