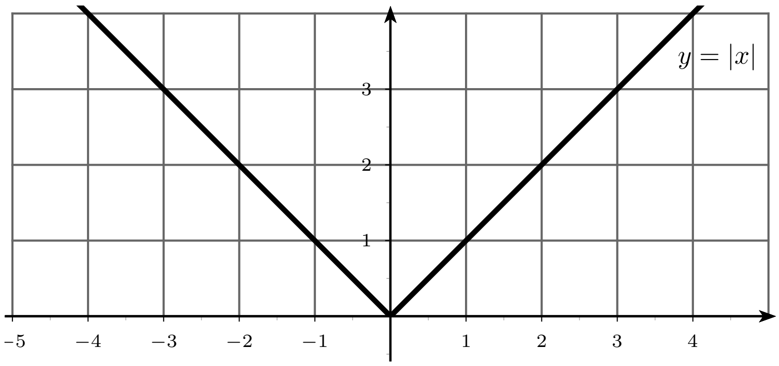
Chapitre 3: Continuité

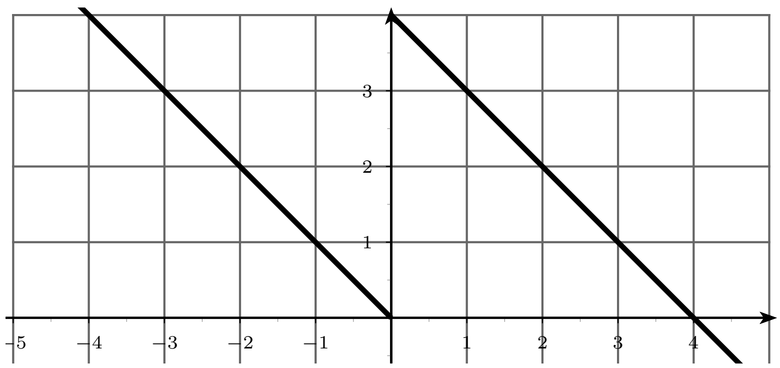
1 Notion de continuité

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
La fonction f est **continue** *sur l'intervalle I lorsque la courbe de la fonction f se trace d'un trait continu sur cet intervalle.*

Exemples:
La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$



La fonction $x \longmapsto \begin{cases} -x & \texttt{si} \quad x < 0 \\ -x+4 & \texttt{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ *n'est pas continue sur $\mathbb{R}$*



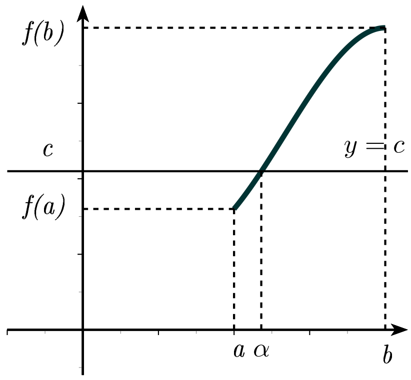
2 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Définition:
f est une strictement monotone sur un intervalle si f est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur cet intervalle.

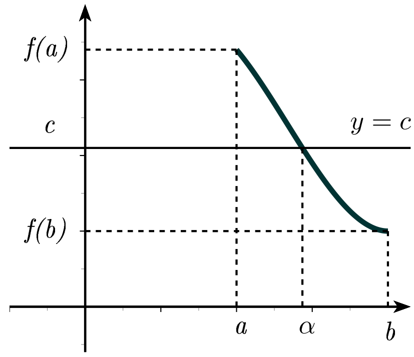
Théorème:
Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$, f prend une fois et une seule fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Cela signifie que pour tout nombre c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique nombre α de l'intervalle $[a;b]$ tel que :

$$f(\alpha) = c$$

Exemples:



f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a; b]$



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a; b]$

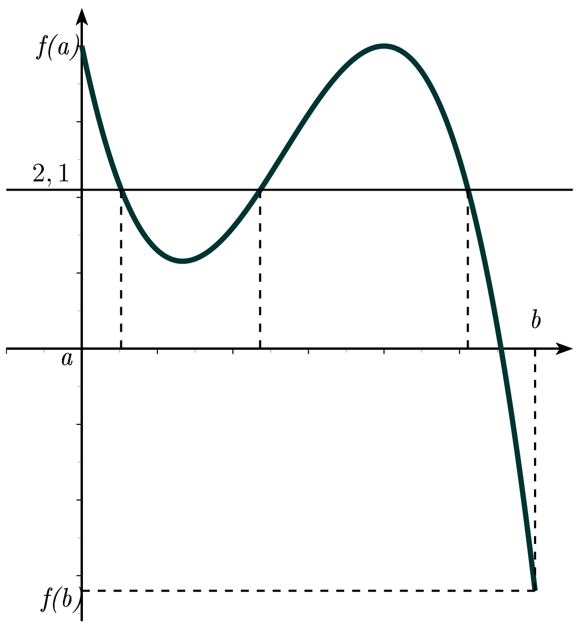
Remarques:

- *Dans un tableau de variation, on conviendra que les flèches obliques de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.*

x	2		5		12
$f(x)$	4	↗	9	↘	-3

La fonction f dont le tableau de variation est donnée ci-dessus est définie sur $[2; 12]$ et grâce au théorème de la valeur intermédiaire, on peut affirmer qu'il existe un unique réel $\alpha \in [5; 12]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

- *Si f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ mais non-strictement monotone, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est prise **au moins une fois** par f.*



Ici la valeur $2,1$ est prise trois fois par la fonction f.

3 Continuité et dérivabilité

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur I alors f est continue sur I

Remarques:

- *Les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont dérivables sur leur domaine de définition donc elles sont aussi continues sur leur domaine de définition.*
- *La réciproque de ce théorème est fausse. Par exemple, la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est par dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, $x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 (la courbe de la fonction n'admet pas de tangente en 0).*