Localiser une solution de f(x)=0

I Introduction

On considère le théorème suivant :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$ tel que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. L'équation $f(x) = 0$ admet alors une unique solution α dans l'intervalle $[a;b]$.

1. Démontrer le théorème ci-dessus.
2. Démontrer l'équation $x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
3. Encadrer α entre deux entiers consécutifs.

Le théorème ci-dessus donne l'existence d'un réel α dans l'intervalle $[a;b]$ tel que $f(\alpha) = 0$ mais ne nous donne pas le moyen de trouver α ou une valeur approchée de α.

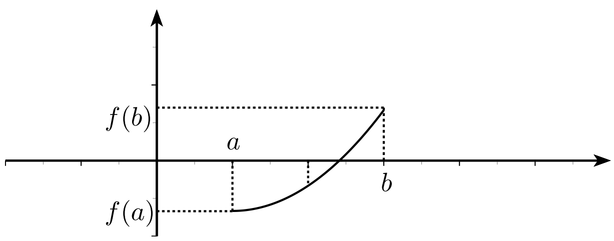
II Un premier algorithme

```
Variables :
a, p
Algorithme :
Saisir a
Saisir p
Tant que f(a) × f(a + p) > 0 faire
    a reçoit a + p
Fin Tant que
Afficher a
Afficher a + p
```

1. Programmer l'algorithme ci-dessous à l'aide du logiciel Algobox :
2. Expliquer le fonctionnement de cet algorithme.
3. Trouver un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.

III L'algorithme de dichotomie

L'idée de cet algorithme est la suivante. On note p le pas qui correspondra à la précision obtenue pour l'encadrement de α :



- si $f(a) \times f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$ alors on remplace b par $\dfrac{a+b}{2}$ sinon on remplace a par $\dfrac{a+b}{2}$;
- On recommence jusqu'à ce que $b - a < p$.

1. Programmer l'algorithme de dichotomie à l'aide du logiciel Algobox.
2. Trouver un encadrement d'amplitude 10^{-4} de α.