

Chapitre 4: Dérivation

1 Nombre dérivé et tangente

1.1 Nombre dérivé d'une fonction en un point

Définition:

f est une fonction définie sur un intervalle I , a et $a + h$ sont deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

Dire que f est dérivable en a signifie que lorsque h tend vers 0, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel L , ce que l'on écrit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

Ce réel L est appelé le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Exemple:

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$. On va démontrer que f est dérivable en -1 et déterminer de même le nombre dérivé en -1 .

Pour tout réel $h \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} &= \frac{2(-1+h)^2 - 5(-1+h) + 4 - [2(-1)^2 - 5(-1) + 4]}{h} \\ &= \frac{2h^2 - 9h}{h} \\ &= 2h - 9 \end{aligned}$$

Si h tend vers 0, alors $2h - 9$ tend vers -9 et

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = -9$$

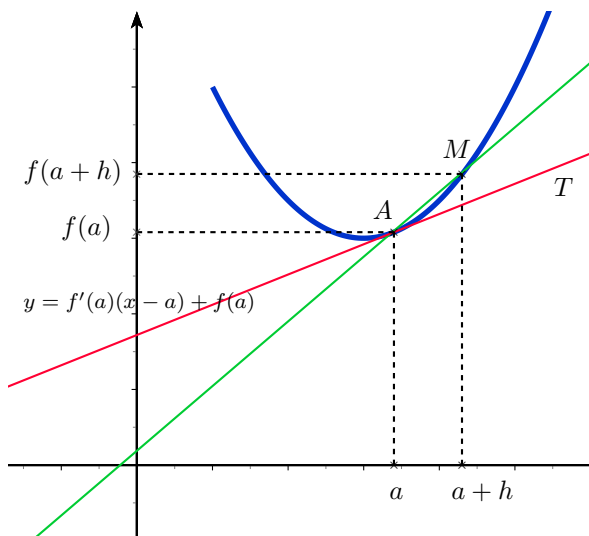
Conclusion : f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -9$.

1.2 Tangente à la courbe d'une fonction

f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de I .

$\mathcal{C}_f$ est sa courbe représentative dans le repère ci-dessous, A et M sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses a et $a + h$ avec $h \neq 0$. Le coefficient directeur de la droite (AM) est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Lorsque h tend vers 0, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel $f'(a)$ et géométriquement la droite (AM) a pour position limite la droite T qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Définition:

f est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de I .

Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a est la droite qui passe par A et de coefficient directeur $f'(a)$. L'équation réduite de cette tangente est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

2 Fonction dérivée

Définition:

f est une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que f est dérivable sur I signifie que f est dérivable en tout réel de I .

La fonction dérivée de f est la fonction qui à tout réel x associe $f'(x)$. Cette fonction est notée f' .

3 Dérivées des fonctions usuelles

Propriété:

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = nx^{n-1}$.

Propriété:

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Propriété:

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4 Opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Théorème:

- La fonction λu où λ est une constante réel, est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$.
- La fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Conséquence :

Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Théorème:

Si pour tout réel x de I , $v'(x) \neq 0$, alors :

- $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Conséquence :

Toute fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

5 Signe de la dérivée et variations

Théorème: (admis)

f est une fonction dérivable sur un intervalle I :

- si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante sur I .
- si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante sur I .
- si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I .