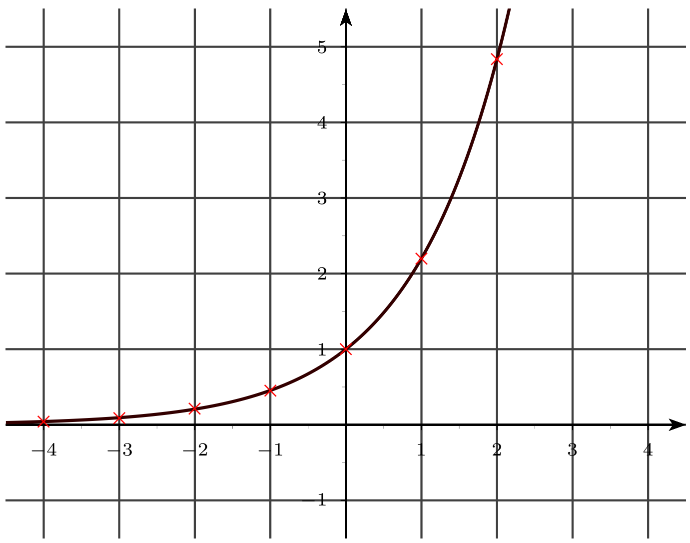
Chapitre 5: Fonctions exponentielles

Dans ce chapitre $q \in]0;+\infty[$.

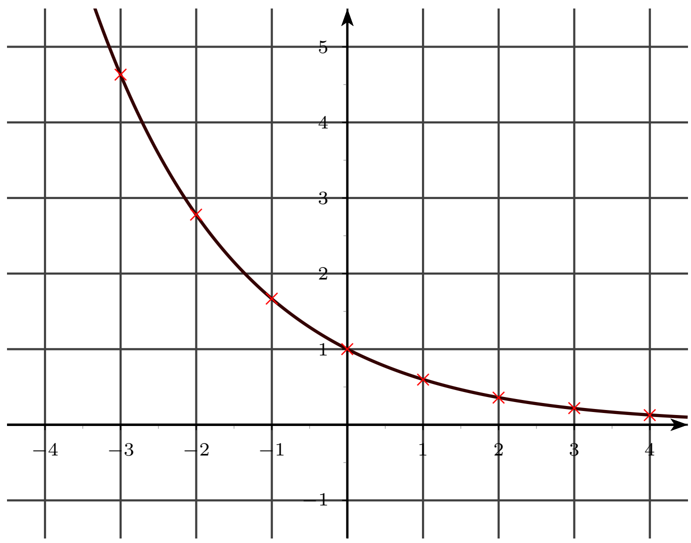
1 Fonctions exponentielles de base q

Définition:
La fonction exponentielle de base q est obtenue en prolongeant par une ligne continue et régulière l'ensemble des points de coordonnées $(n; q^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

Cas $q > 1$



Cas $q < 1$



Remarque:
Pour tout $q > 0$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Théorème:
Pour tout $q > 0$, la fonction $x \longmapsto q^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Remarque:
On déduit de ce théorème que les fonctions exponentielles de base q sont continues sur $\mathbb{R}$ et admettent en tout point une tangente.

2 Relation fonctionnelle

Théorème:
Pour tout $q > 0$ et pour tous nombres réels a et b on a :

$$q^{a+b} = q^a q^b$$

A l'aide de ce théorème, on peut montrer les propriétés suivants :

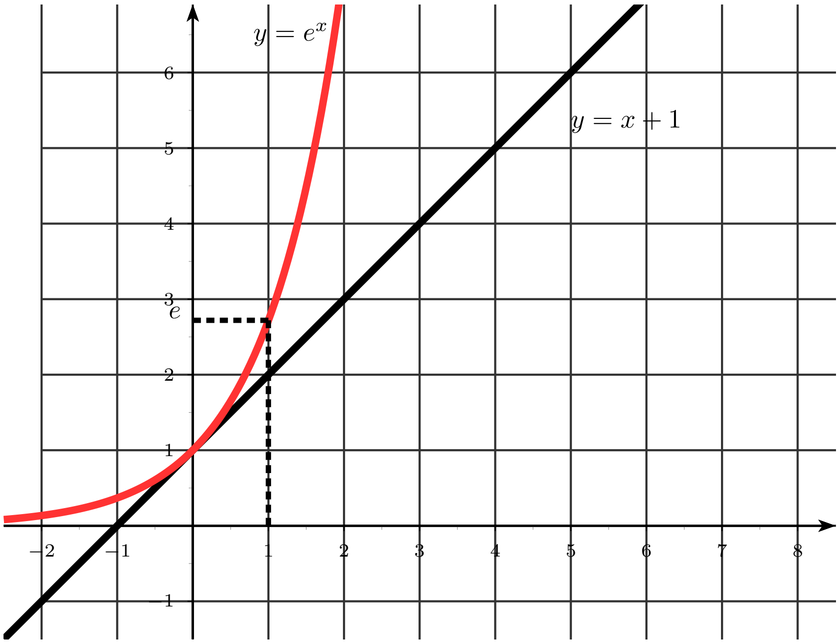
Propriété:
Pour tout $q > 0$ et pour tous nombres réels a et b on a :

- $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$
- $(q^a)^b = q^{ab}$
- $q^{a-b} = \dfrac{q^a}{q^b}$
- $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$

3 Fonction exponentielle

Définition:
Parmi les fonctions $x \longmapsto q^x$, la fonction $x \longmapsto e^x$ est celle telle que $f'(0) = 1$. Cette fonction est appelé fonction exponentielle et est notée $x \longmapsto exp(x)$

Remarque:
$e = exp(1) \simeq 2,7182818$



Théorème:
La fonction exponentielle est égale à sa fonction dérivée.

Ce théorème permet de démontrer la propriété suivante :

Propriété:
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème:
La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée :

$$(\exp x)' = \exp x$$

Théorème:
Si u est un fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $f : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I,

$$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$$

Exercice:
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+3x-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x-2}$$