Chapitre 6: Logarithme

1 Définition

Définition:
La fonction logarithme népérien notée ln *est la fonction définie sur* $]0;+\infty[$ *qui, à tout réel* x *strictement positif, associe le réel* y *noté* lnx *dont l'exponentielle est* x.

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x.$$

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés:

- $\ln 1 = 0$ *et* $\ln e = 1$
- *Pour tout réel* $x > 0$, $e^{\ln x} = x$
- *Pour tout réel* x, $\ln e^x = x$
- *Pour tout réel* $x > 1$, $\ln x > 0$
- *Pour tout réel* $0 < x < 1$, $\ln x < 0$

De plus, par croissance de la fonction exponentielle, on a :

Propriétés:
Pour tous réels a *et* b *strictements positifs :*

- $\ln a = \ln b \Longleftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Longleftrightarrow a < b$

2 Relation fonctionnelle

Propriété:
Pour tous réels a *et* b *strictements positifs :*

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriétés:
Soit a *et* b *deux réels strictement positifs et* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

- $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$;
- $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$;
- $\ln a^n = n \ln a$;
- $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

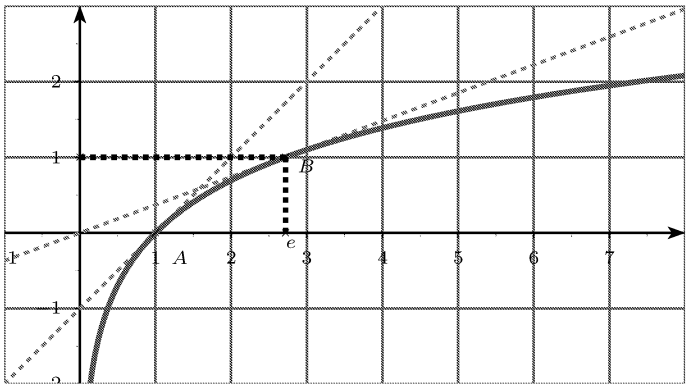
3 Étude de la fonction logarithme

Propriété:
La fonction ln est dérivable (donc également continue) sur $]0;+\infty[$ *et*

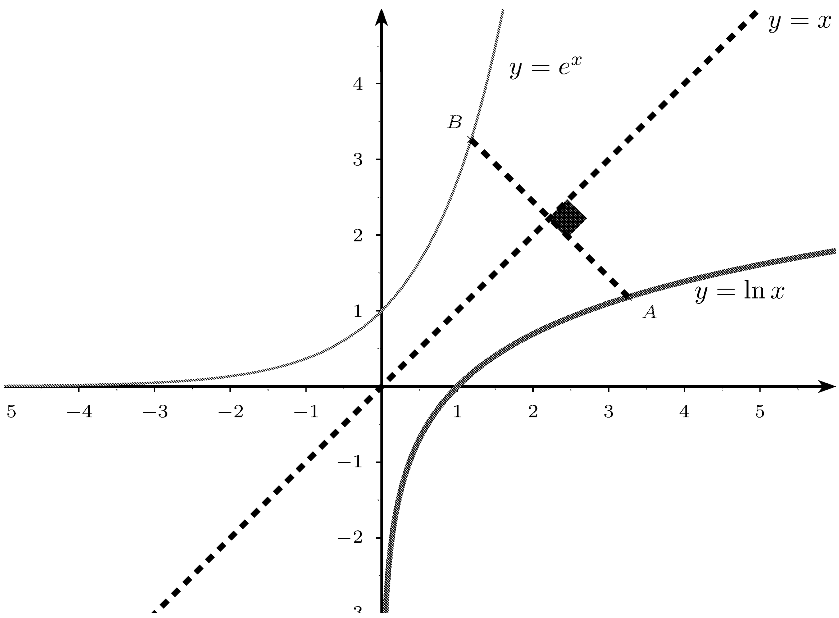
$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Comme $\frac{1}{x} > 0$ *sur* $]0;+\infty[$ *, on en déduit que la fonction logarithme est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$

La courbe de la fonction logarithme admet une tangente d'équation $y = \frac{x}{e}$ en e et une tangente d'équation $y = x - 1$ en 1.



La courbe de la fonction logarithme est symétrique à la courbe de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Théorème:
Si u *est un fonction dérivable sur un intervalle* I *tel que pour tout réel* $x \in I$, $u(x) > 0$ *alors la fonction* $f : x \longmapsto \ln[u(x)]$ *est dérivable sur* I *et pour tout réel* x *de* I,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exercice:
La fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \ln(1 + x^2)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$