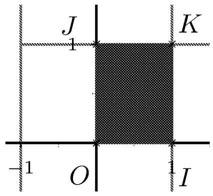
Chapitre 7: Intégration

1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

1.1 Définition

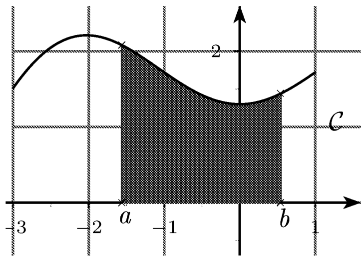
Dans un repère orthogonal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, l'unité d'aire (U.A) est l'aire du rectangle $OIKJ$.



Dans la suite :

- toutes les courbes sont représentées dans un repère orthogonal ;
- toutes les aires sont données dans l'unité d'aire associée au repère.

Définition:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *se lit « intégrale de a à b de $f(t)\mathrm{d}t$ ».*

Remarques:

- *La variable t n'a pas d'importance, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(q)\mathrm{d}q$.*
- *Par convention, $\displaystyle\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = 0$*

1.2 Théorème fondamental

Théorème:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$

2 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

2.1 Notion de primitive

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Exemple:
$\left(2x^2\right)' = 4x$ *donc la fonction $F : x \mapsto 2x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 4x$*

Théorème:
Toute fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ admet des primitives sur $[a;b]$.

Démonstration:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors la fonction f admet une primitive f sur $[a;b]$ définie par $f : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Remarque:
On admettra que ce résultat peut s'étendre pour un intervalle quelconque I et pour des fonctions continues de signe quelconque.

2.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Théorème:
f est une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I.

- *La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel est aussi une primitive de f sur I.*
- *Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$.*
- *$x_0 \in I$ et c un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = c$.*

2.3 Relation entre intégrale et primitive

Théorème:
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ alors

$$\int_a^b f(t)\mathtt{d}t = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.

Démonstration:
f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ donc $x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$ est aussi une primitive de f sur $[a;b]$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = \int_a^x f(t)\mathtt{d}t + k$ sur $[a;b]$. De plus $F(a) = \int_a^a f(x)\mathtt{d}x + k = k$ donc $k = F(a)$ donc $F(b) = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t + F(a)$ soit $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t$

Remarque:
On note

$$\int_a^b f(t)\mathtt{d}t = [F(t)]_a^b$$

3 Détermination de primitives

3.1 Primitives de fonctions usuelles

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous figure la primitive la plus usuelle c'est à dire sans constante.

Fonction définie par $f(x) = \ldots$	*Une primitive de f est définie par $F(x) = \ldots$*	*sur $I = \ldots$*
x^n *où* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \textit{pour} \quad n \geq 0 \\ ]-\infty;0[\,\textit{ou}\,]0;+\infty[& \textit{pour} \quad n \leq -2 \end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

3.2 Primitives et opérations sur les fonctions

Propriété:

- *F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.*
- *F est une primitive de la fonction f sur I et k est un nombre réel alors $k \cdot F$ est une primitive de $k \cdot f$ sur I.*

Propriété:
Dans le tableau ci-dessous u désigne une fonction dérivable sur I.

Fonction définie par $f(x) = \ldots$	*Une primitive de f est définie par $F(x) = \ldots$*	*Conditions*
$u'e^u$	e^u	*aucune*
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x) > 0$ *pour tout* x *de* I

4 Extension de la notion d'intégrale

4.1 Définition de l'intégrale pour une fonction de signe quelconque

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et on démontré que si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t = F(b) - F(a)$. On admet dans la suite du chapitre que cette formule s'étend au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et on pose la définition suivante :

Définition:
f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I, a et b sont deux nombres quelconques de I.
L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t = F(b) - F(a)$.

Exemple:
$x \longmapsto 6x^2$ est une fonction continue sur $[-3;4]$ donc $\int_{-3}^4 6x^2\mathtt{d}x = [2x^3]_{-3}^4 = 128 - (-54) = 182$

Propriété:
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ alors

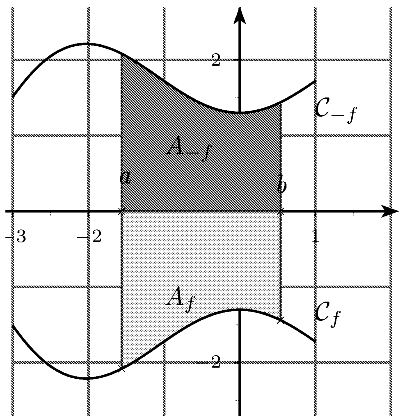
- $\int_a^a f(t)\mathtt{d}t = F(a) - F(a) = 0,$
- $\int_b^a f(xt)\mathtt{d}t = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)\mathtt{d}t.$

4.2 Linéarité de l'intégration

Théorème:
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et λ un nombre réel :

- $\int_a^b [f(t) + g(t)]\,\mathtt{d}t = \int_a^b f(t)\mathtt{d}t + \int_a^b g(t)\mathtt{d}t$
- $\int_a^b \lambda f(t)\mathtt{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\mathtt{d}t$

Propriété:
Soit f une fonction continue et négative sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t$ est l'opposé de l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



En effet, $-f$ est positive donc $\int_a^b -f(t)\mathtt{d}t = A_{-f} = A_f$ et $\int_a^b -f(t)\mathtt{d}t = -\int_a^b f(t)\mathtt{d}t$ donc $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t = -A_f$

4.3 Positivité de l'intégration

Théorème:
Pour $a < b$, si $f \geq 0$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t \geq 0$

Corollaire:
Pour $a < b$, si $f \leq g$ sur $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathtt{d}t$

Démonstration:
Considérons $f-g \geq 0$ par hypothèse donc $\int_a^b (f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$

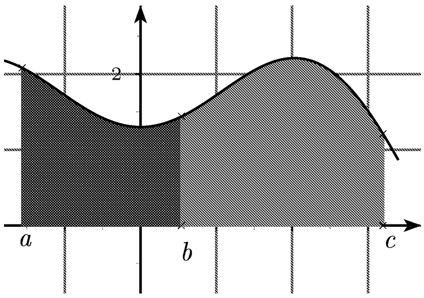
Remarque:
Attention, la réciproque est fausse.

4.4 Relation de Chasles

Propriété: (Relation de Chasles)
Soit f une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t$$

Remarque:
Dans le cas où f est positive sur I et $a \leq b \leq c$, cette propriété est illustrée par le graphique ci-dessous :



Cependant la relation de Chasles est vraie quels que soient l'ordre des réels a, b, c et le signe de f.

4.5 Aire du domaine compris entre deux courbes

Propriété:
Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ tel que $f(x) \geq g(x)$ sur $[a;b]$ alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a;b]$ est définie par $\int_a^b [f(t)-g(t)]\,\mathrm{d}t$.

4.6 Valeur moyenne

Définition:
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$