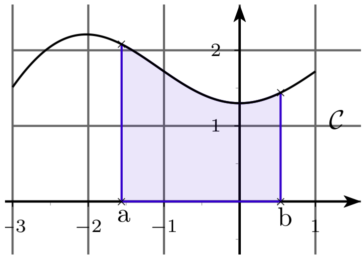
Introduction à la notion d'intégrale

1 Définition de l'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
L'intégrale de a à b de la fonction f, notée $\int_a^b f(t)\mathtt{d}t$ est l'aire (en unités d'aires) du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$.



Déterminer à l'aide d'une représentation graphique les intégrales suivantes :

1. $\int_2^4 5\mathtt{d}t$
2. $\int_1^3 2t-2\mathtt{d}t$
3. $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}\mathtt{d}t$
4. $\int_2^2 e^t\mathtt{d}t$

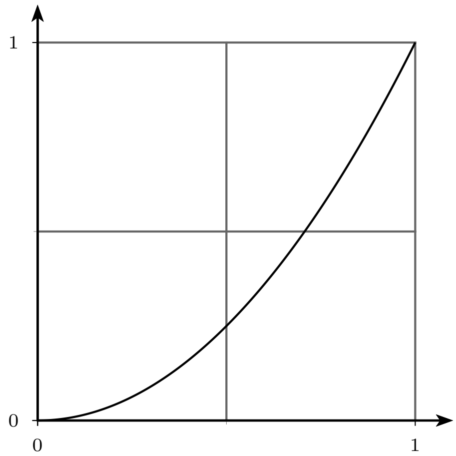
2 Aire sous la courbe et méthode des rectangles

On considère la fonction f définie par $f(x)=x^2$ et $\mathcal{P}$ la courbe de la fonction f dans un repère orthonormée du plan. Pour tout entier n, $n \geq 2$, on partage l'intervalle $[0;1]$ en n sous-intervalles de même longueur.

2.1 Cas n=2

On considère les fonctions en escaliers m_2 et M_2 définies par :

$$m_2 = \begin{cases} f(0) & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad et \quad M_2 = \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ f(1) & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

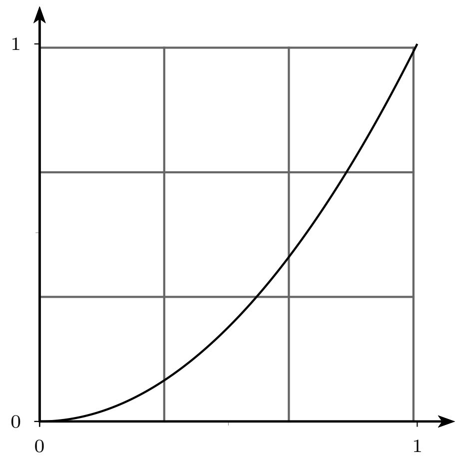


a. Tracer les courbes de m_2 et M_2 sur $[0;1]$.
b. Montrer que $m_2(x) \leq f(x) \leq M_2(x)$ sur $[0;1]$.
c. Déterminer $I\left(m_2\right) = \displaystyle\int_0^1 m_2(x)\mathtt{d}x$ et $I\left(M_2\right) = \displaystyle\int_0^1 M_2(x)\mathtt{d}x$
d. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathtt{d}x$.

2.2 Cas n=3

On considère les fonctions en escaliers m_3 et M_3 définies par :

$$m_3 = \begin{cases} f(0) & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{1}{3}\right) & si \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) & si \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad et \quad M_3 = \begin{cases} f\left(\frac{1}{3}\right) & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) & si \quad \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ f\left(1\right) & si \quad \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



a. Tracer les courbes de m_3 et M_3 sur $[0;1]$.
b. Déterminer $I\left(m_3\right)$ et $I\left(M_3\right)$
c. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathtt{d}x$.

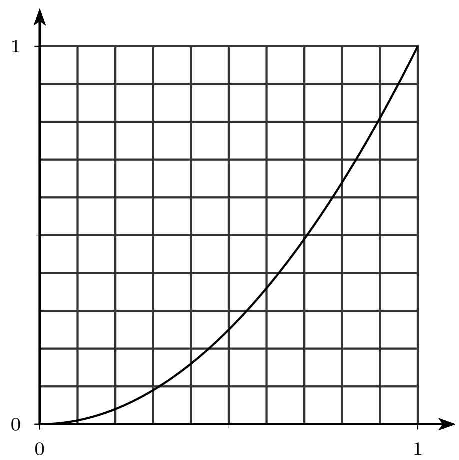
2.3 Cas général

On suppose n quelconque, $n \geq 2$. On appelle s_n la somme des aires des rectangles inférieurs donc

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

De même, on appelle S_n la somme des aires des rectangles supérieurs donc

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$



a. Ecrire un algorithme que permet de déterminer s_n et S_n en fonction de n.

b. Encadrer $\int_0^1 f(x)\mathtt{d}x$ avec s_n et S_n pour tout entier n.

c. Montrer que :

$$s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$$

d. Montrer que :

$$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

e. On admet que pour tout entier n,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En déduire s_n et S_n en fonction de n.

f. Etudier le comportement des deux suites lorque n devient de plus en plus grand

g. Déterminer $\int_0^1 t^2\mathtt{d}t$

3 Un théorème fondamental

On considère une fonction f **continue et positive** sur $[a;b]$. On va démontrer que $F(x) = \int_a^x f(t)\mathtt{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et $F' = f$. Pour cela, on se place dans le cas particulier où f est croissante sur $[a;b]$.

1. Soit $x_0 \in [a;b]$ et h un réel non-nul tel que $x_0 + h \in [a;b]$, déterminer à quoi correspond

$$F(x_0 + h) - F(x_0)$$

2. Pour $h > 0$, démontrer que :

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

3. Pour $h < 0$, démontrer que :

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

4. En déduire que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

5. Conclure.