Notion de primitive

Définition:
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout x de I,

$$F'(x) = f(x)$$

Si elle existe, on note usuellement F la primitive d'une fonction f.

Exercice 1:
Déterminer le domaine de définition puis une primitive des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = 5x^2 - 4x + 1$
b. $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$
c. $h(x) = 6e^x + 6$
d. $m(x) = 7x^2 + \dfrac{7}{x^2}$

Exercice 2:
Déterminer le domaine de définition commun de F_1 et F_2 puis montrer dans chaque cas qu'elles sont des primitives d'une même fonction f.

a. $F_1(x) = 2x + 7$ et $F_2(x) = 2x - 2$
b. $F_1(x) = x^2 + 5x + 1$ et $F_2(x) = x(x + 5)$
c. $F_1(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ et $F_2(x) = 1 + \dfrac{1}{x+1}$
d. $F_1(x) = \dfrac{3x^3 + 3x + 1}{x^2 + 1}$ et $F_2(x) = 3x + \dfrac{1}{x^2+1}$

Exercice 3:
Soit f une fonction qui admet une primitive F sur un intervalle I. Démontrer que :
1. La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel est aussi une primitive de f sur I.
2. Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$.
3. $x_0 \in I$ et c un nombre réel. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que $F(x_0) = c$.

Exercice 4:
Déterminer l'unique primitive F de f sur D vérifiant la condition ennoncée :

a. $f(x) = 2x + 1$, $F(2) = 0$ et $D = \mathbb{R}$
b. $f(x) = 2x^2 - x$, $F(1) = -1$ et $D = \mathbb{R}$
c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $F(3) = 2$ et $D =]0; +\infty[$
d. $f(x) = e^x$, $F(1) = 0$ et $D = \mathbb{R}$

Exercice 5:
Compléter le tableau ci-dessous :

Fonction définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est définie par $F(x) = \dots$	sur $I = \dots$
x^n où $n \in \mathbb{N}$		
$\dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$		
$\dfrac{1}{x}$		$]0; +\infty[$
e^x		