

Chapitre 8: Loi à densité

1 Introduction

En première, on a introduit la notion de variable aléatoire X sur des ensembles Ω finis. Pour définir la loi de la variable aléatoire X , il nous suffisait de donner $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et de déterminer $P(X = x_k)$ pour $k \in [1; n]$. Par exemple, si on considère l'expérience suivante :

Un joueur lance deux fois une pièce équilibrée; il gagne 2 euros par « pile » obtenu et perd 1 euro par « face » obtenu. On modélise l'expérience grâce à l'univers $\Omega = \{2P; 1F1P; 2F\}$ et la loi de probabilité :

Issue	2P	1F1P	2F
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La variable aléatoire X qui à chaque issue associe le gain algébrique correspondant du joueur est définie par $X(\Omega) = \{-2; 1; 4\}$ et :

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On considère l'expérience suivante :

On tire sur une cible circulaire de 1 mètre de rayon sans jamais la manquer.

La variable aléatoire X qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs de $[0; 1]$.

Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements $X = x_i$ puisqu'il y en a une infinité. Une autre approche est alors nécessaire. On va donc s'intéresser aux événements du type « X prend ses valeurs dans J » noté « $X \in J$ ». Il s'agit alors de définir la probabilité de $P(X \in J)$.

Dans notre exemple, $P(X \notin [0; 1]) = 0$ donc on peut déterminer la loi de X , on cherchera à déterminer $P(X \in [0; r]) = P(X \leq r)$ avec $r \in [0; 1]$.

2 Variable aléatoire suivant une loi à densité sur $I = [a; b]$

Définition:

On appelle **densité de probabilité** sur $[a; b]$ toute fonction définie sur $[a; b]$ telle que :

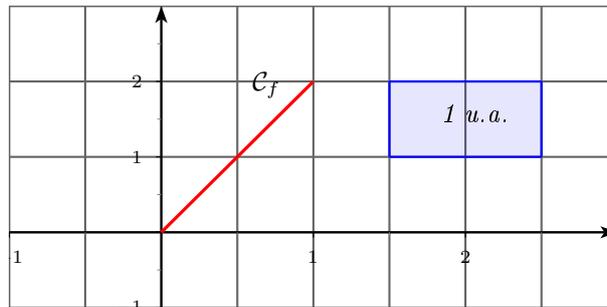
- f est continue¹ et positive sur $[a; b]$;
- l'aire sous la courbe C_f est égale à 1 u.a.

Exemple:

Dans l'exemple de la cible, on a $I = [0; 1]$ et on admet que X a pour densité la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0; 1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0; 1] \end{cases}$$

1. (sauf en un nombre fini de points)

**Définition:**

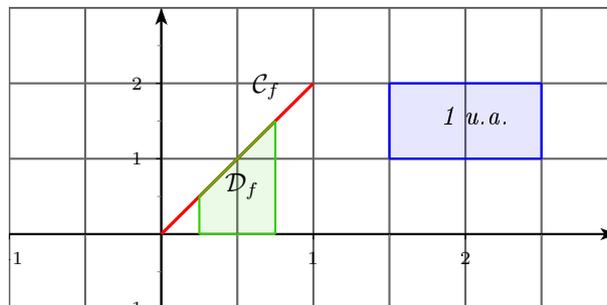
f désigne une densité de probabilité définie sur $[a; b]$. Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi de densité f signifie qu'à tout intervalle $J \subset [a; b]$, on associe la probabilité :

$$P(X \in J) = \text{aire}(\mathcal{D}_f)$$

où \mathcal{D}_f est le domaine sous la courbe \mathcal{C}_f sur l'intervalle J .

Exemple:

Pour déterminer la probabilité que la flèche soit arrivée à une distance comprise entre 0,25 et 0,75 mètre du centre, on calcule l'aire sous la courbe entre 0,25 et 0,75 soit :



On a donc

$$P(X \in [0,25; 0,75]) = \int_{0,25}^{0,75} 2x dx = [x^2]_{0,25}^{0,75} = 0,5$$

Attention, si on cherche à déterminer $P(X = 0,25)$, on obtient :

$$P(X = 0,25) = \int_{0,25}^{0,25} 2x dx = [x^2]_{0,25}^{0,25} = 0$$

Ainsi, la probabilité que X prenne une valeur isolée de l'intervalle $[0; 1]$ est nulle et cela se généralise pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité. On en déduit donc que pour toutes les variables aléatoires suivant une loi à densité :

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$

Remarque:

Pour tout intervalle $J \subset I$, on a $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$

3 Loi uniforme

Définition:

Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur $[a; b]$ de valeur $\frac{1}{b-a}$.

Propriété:

Pour tout intervalle $[c; d] \subset [a; b]$, $P(X \in [c; d]) = \frac{d-c}{b-a}$

Définition:

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a; b]$ est :

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

Théorème:

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$. Son espérance mathématique est $E(X) = \frac{a+b}{2}$