Convexité et dérivée

Exercice 1:

Soit f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I et un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. Démontrer que f admet $f(c)$ pour minimum sur I.

Exercice 2:

Soit f une fonction concave et dérivable sur un intervalle I et un réel $c \in I$ tel que $f'(c) = 0$. Démontrer que f admet $f(c)$ pour maximum sur I.

Exercice 3:

Soit f la fonction carré, g la fonction racine carrée et h la fonction exponentielle.

1. Etudier les variations des fonctions f', g' et h'.
2. Quel lien peut-on observer entre la convexité et la fonction dérivée ?
3. Tester votre affirmation avec la fonction logarithme.

Exercice 4:

Démontrer le théorème ci-dessous :
Soit f une fonction définie sur $]a;b[$, si la dérivée seconde f'' existe sur $]a;b[$ alors :

- Si, pour tout réel $x \in]a;b[$, $f''(x) \geq 0$ alors f est convexe sur $]a;b[$;
- Si, pour tout réel $x \in]a;b[$, $f''(x) \leq 0$ alors f est concave sur $]a;b[$.

Exercice 5:

Etudier la convexité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$
2. $f_2(x) = 5x^2 - 6x + 3$
3. $f_3(x) = -x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
4. $f_4(x) = x\ln(x)$
5. $f_5(x) = e^{1+x+x^2}$
6. $f_6(x) = ln(x^2)$
7. $f_7(x) = x^3 + x^2 + x + 1$