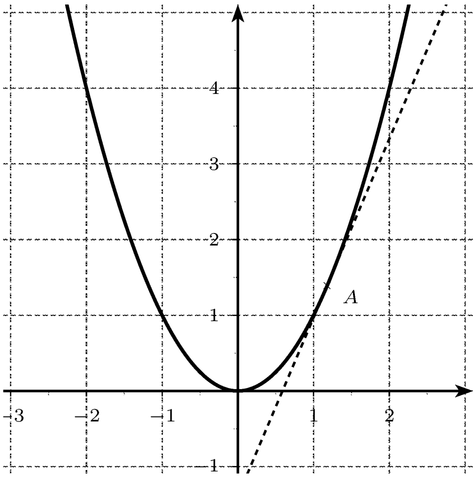
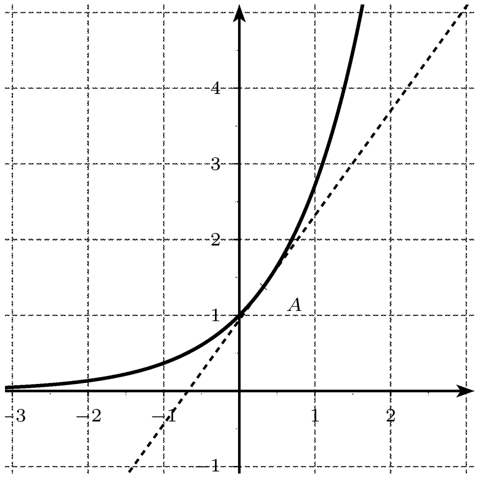
# Chapitre 9: Fonctions convexes

## 1 Définition

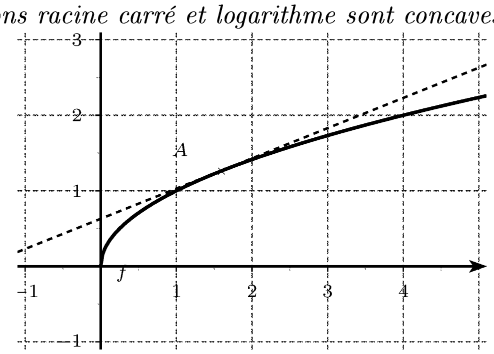
**Définition:**
*Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est dite **convexe** sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située **au-dessus** de chacune de ses tangentes.*
*Une fonction dérivable sur un intervalle $I$ est dite **concave** sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située **au-dessous** de chacune de ses tangentes.*

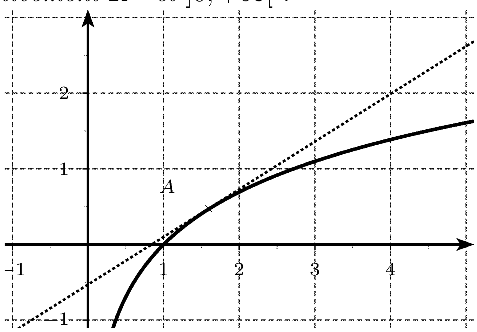
**Exemples:**
*Les fonctions carré et exponentielle sont convexes sur $\mathbb{R}$ :*




*Les fonctions racine carré et logarithme sont concaves sur respectivement $\mathbb{R}^+$ et $]0;+\infty[$ :*




## 2 Propriétés

**Théorème:**
*Si $f$ est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle $I$ et si pour un réel $c \in I$, $f'(c) = 0$ alors $f$ admet un minimum absolu en $c$.*
*Si $f$ est une fonction concave et dérivable sur un intervalle $I$ et si pour un réel $c \in I$, $f'(c) = 0$ alors $f$ admet un maximum absolu en $c$.*

**Démonstration:**
*Si $f$ est une fonction convexe dont la courbe de $f$ est située au-dessus de ses tangentes donc pour tout $x \in I$ :*

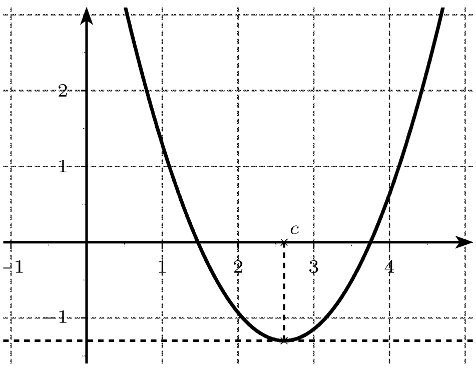
$$f(x) \geq f'(c)(x-c) + f(c)$$

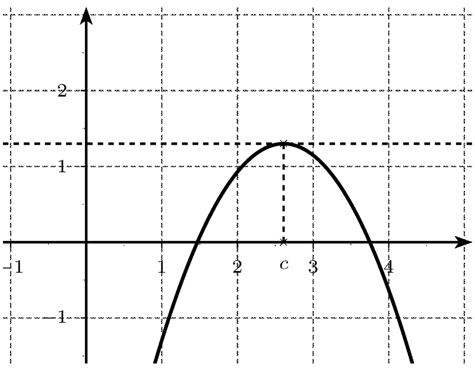
*et comme $f'(c) = 0$, on a :*

$$f(x) \geq f(c)$$

*Ainsi $f(c)$ est un minimum absolu pour $f$ sur $I$. La démonstration est similaire pour $f$ concave.*

**Exemples:**




**Théorème:**
*Si $f$ est une fonction convexe et dérivable sur un intervalle $I$ alors $-f$ est concave sur $I$.*
*Si $f$ est une fonction concave et dérivable sur un intervalle $I$ alors $-f$ est convexe sur $I$.*

## 3 Lien entre convexité et sens de variation de $f'$

**Théorème:**
*Soit $f$ une fonction dérivable sur $I$ alors on a les équivalences suivantes :*

$$f \text{ concave sur } I \iff f' \text{ est décroissante sur } I$$

$$f \text{ convexe sur } I \iff f' \text{ est croissante sur } I$$

**Théorème:**
*Soit $f$ une fonction définie sur $]a;b[$, si la dérivée seconde $f''$ existe sur $]a;b[$ alors :*

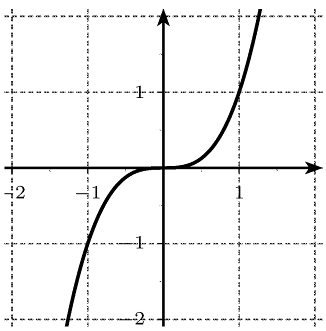
- *Si, pour tout réel $x \in ]a;b[$, $f''(x) \geq 0$ alors $f$ est convexe sur $]a;b[$ ;*
- *Si, pour tout réel $x \in ]a;b[$, $f''(x) \leq 0$ alors $f$ est concave sur $]a;b[$.*

**Remarque:**
*Ce théorème est vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.*

## 4 Point d'inflexion

**Définition:**
*Un point d'inflexion d'une courbe est un point où la courbe traverse la tangente.*

**Exemple:**
*La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est définie sur $\mathbb{R}$. La courbe de cette fonction admet pour tangente en l'origine la droite d'équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ soit $y = 0$ pusique $\left(x^3\right)' = 2x^2$. La courbe de cette fonction traverse la tangente en l'origine donc l'origine est un point d'inflexion de cette courbe.*




**Théorème:**
*Soit $f$ une fonction définie sur $]a;b[$ et telle que $f''$ existe sur $]a;b[$.*
*Si $f''$ s'annule en $c$ en changeant de signe, le point $A(c;f(c)$ est un point d'infexion de la courbe représentative de $f$.*

**Remarque:**
*La condition $f''$ s'annule en $c$ n'est pas suffisante pour établir le point d'inflexion.*