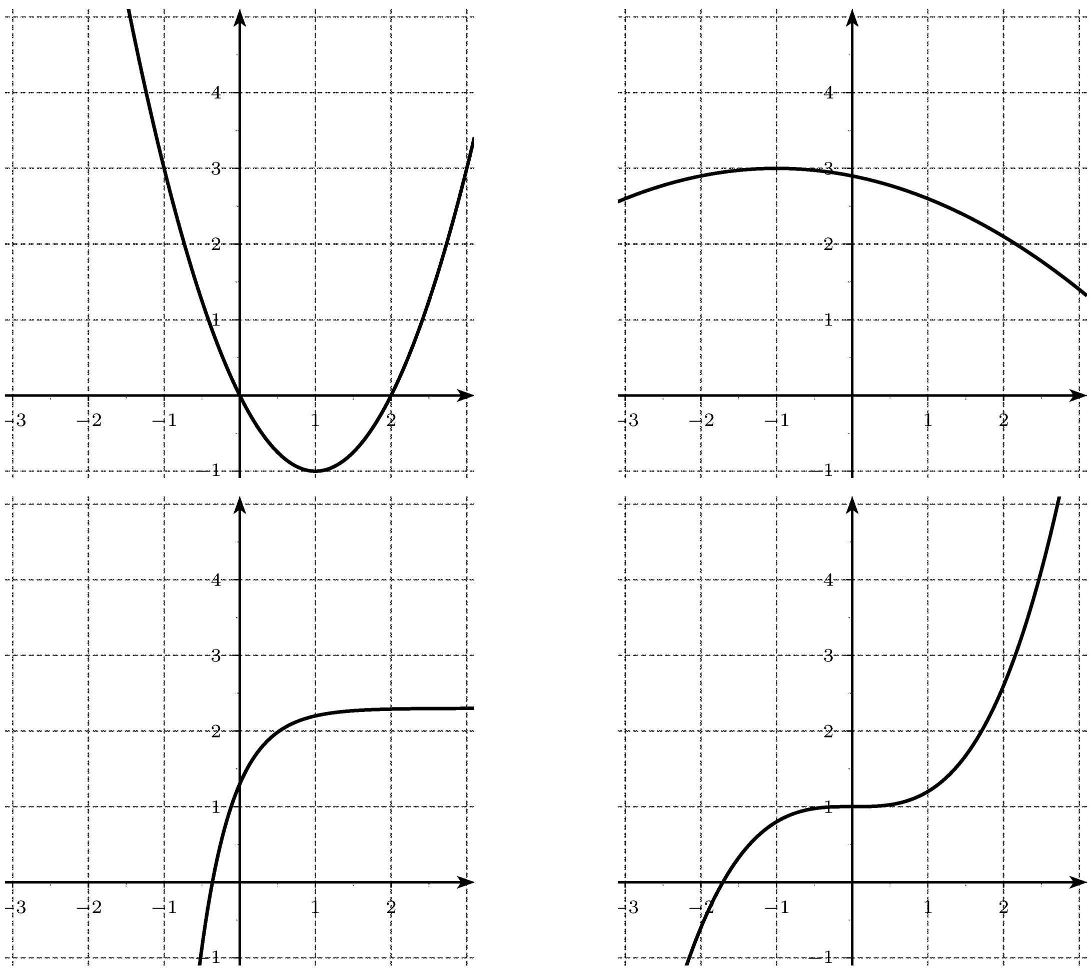
Notion de fonction convexe

Définition:
Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite ***convexe*** *sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située* ***au-dessus*** *de chacune de ses tangentes.*
Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite ***concave*** *sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située* ***au-dessous*** *de chacune de ses tangentes.*
Un point d'inflexion d'une courbe est un point où la courbe traverse la tangente.

Exercice 1:

Déterminer parmi les fonctions dont les courbes sont données ci-dessous lesquelles sont convexes et lesquelles sont concaves. Identifier lorsqu'il y en a les point d'inflexions des courbes.



Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé.
   a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en a.
   b. Démontrer que $x^2 - 2ax + a^2 \geq 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f est convexe.

Exercice 3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Soit $a \in]0;+\infty[$ un réel fixé.
   a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en a.
   b. Développer $-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2$.
   c. En déduire que $f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \leq 0$ sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire que f est concave.

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

1. Soit $a \in]0;+\infty[$ un réel fixé.
   a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en a.
   b. Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$ sur $]0;+\infty[$.
   c. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire que f est concave.

Exercice 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel fixé.
   a. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en a.
   b. Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f est convexe.

Exercice 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$, g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ et h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln(x)$

1. a. Etudier la position relative de la courbe de la fonction f et de sa tangente au point d'abscisse 0.
   b. Etudier la position relative de cette tangente avec la courbe de la fonction g.
2. a. Etudier la position relative de la courbe de la fonction h et de sa tangente au point d'abscisse 1.
   b. Etudier la position relative de cette tangente avec la courbe de la fonction g.
3. En déduire les positions relatives des courbes des fonctions f, g et h.