Corrigé du devoir bilan 1

Exercice 1: 7 points

1. Les antécédents de 2 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 2$:
$f(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^3 - x^2 - x + 2 = 2 \Longleftrightarrow 2x^3 - x^2 - x = 0 \Longleftrightarrow x(2x^2 - x - 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad \texttt{ou} \quad 2x^2 - x - 1 = 0$. Or $2x^2 - x - 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 9$ donc $2x^2 - x - 1$ admet $x_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = 1$ pour racines. Ainsi $f(x) = 2 \Longleftrightarrow x \in \left\{-\dfrac{1}{2}; 0; 1\right\}$
2. f est une fonction polynôme de degré 3 donc f est dérivable et $f'(x) = 6x^2 - 2x - 1$. $6x^2 - 2x - 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 28$ donc $6x^2 - 2x - 1$ admet $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{7}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{7}}{6}$ pour racines. De plus $a > 0$ donc f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

3. La tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse -1 a pour équation : T a pour équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(-1)(x+1) + f(-1) \\ y & = & 7(x+1) + 0 \\ y & = & 7x + 7 \end{array}$$

Exercice 2: 3 points

1. On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u_4 = 100 \\ u_{10} = 96 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 + 4r = 100 \\ u_0 + 10r = 96 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 + 4r = 100 \\ 6r = -4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{308}{3} \\ r = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

2. On obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} u_2 = 5 \\ u_4 = 10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 q^2 = 5 \\ u_0 q^4 = 10 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{5}{2} \\ q^2 = 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_0 = \dfrac{5}{2} \\ q = \sqrt{2} \end{array}\right.$$

Exercice 3: 2 points

S est la somme des 16 premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{1}{27}$ donc

$$\begin{array}{rcl} S & = & \dfrac{1}{27}\dfrac{1-3^16}{1-3} \\ & = & \dfrac{1}{27}\dfrac{1-3^16}{1-3} \\ & = & \dfrac{43046720}{54} \\ & = & \dfrac{21523360}{27} \end{array}$$

Exercice 4: 8 points

1. $u_1 = \dfrac{1}{3}u_0 + 2 = \dfrac{7}{3}$; $u_2 = \dfrac{1}{3}u_1 + 2 = \dfrac{25}{9}$ et $u_3 = \dfrac{1}{3}u_2 + 2 = \dfrac{79}{27}$
2. a. On a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$ et $v_n = u_n - 3$ donc

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1 \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 3) \Leftrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

b. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2$ donc pour tout entier n :

$$v_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

et comme $v_n = u_n - 3$, pour tout entier n :

$$u_n - 3 = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftrightarrow u_n = -2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

3. On a :

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3} u_i \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 \\ &= 1 + \frac{7}{3} + \frac{25}{9} + \frac{79}{27} \\ &= \frac{27 + 63 + 75 + 79}{27} \\ &= \frac{244}{27} \end{aligned}$$