Corrigé du devoir bilan 2

Exercice 1: 10 points

1. La production diminue de $2\,\%$ par an donc pour tout entier n,

$$U_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{100}\right) U_n \Longrightarrow U_{n+1} = 0,98 U_n$$

Ainsi (U_n) est une suite géométrique de raison $0,98$ et de premier terme $U_0 = 120000$ donc pour tout entier naturel n :

$$U_n = 120000 \times 0,98^n$$

2. a. Le nombre de jouets fabriqués en 2005 correspond à $U_5 = 120000 \times 0,98^5 = 108470$.

   b. $U_9 = 100050$ et $U_{10} = 98049$ donc la production sera inférieure à 100000 jouets en 2010.

   c. ALgorithme :

```
Variables :       A est un réel
                  n est un entier naturel

Initialisation :  Affecter à A la valeur 120000
                  Affecter à n la valeur 0

Traitement :      Tant que A ⩾ 90000
                      n prend la valeur n + 1
                      A prend la valeur 0,98A
                  Fin Tant que

Sortie :          Afficher n
```

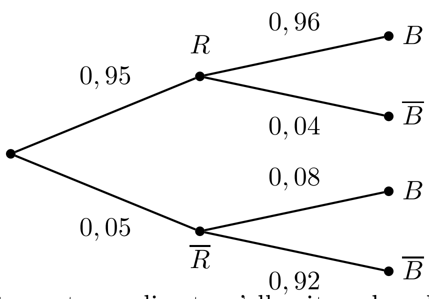
3. a. $1 + 0,98 + 0,98^2 + \cdots + 0,98^n = \dfrac{1 - 0,98^{n+1}}{1 - 0,98}$ soit $1 + 0,98 + 0,98^2 + \cdots + 0,98^n = 50\left(1 - 0,98^{n+1}\right)$

   b.
$$\begin{array}{rcl} S_n & = & U_0 + U_0 0,98 + U_0 0,98^2 + \cdots + U_0 0,98^n \\ & = & U_0\left(1 + 0,98 + 0,98^2 + \cdots + 0,98^n\right) \\ & = & 120000 \times 50\left(1 - 0,98^{n+1}\right) \\ & = & 6000000 \times \left(1 - 0,98^{n+1}\right) \end{array}$$

   c. Le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production est $S_{15} = 1657214$

Exercice 2: 10 points

1. $P\left(\overline{R}\right) = 0,05$ et $P_R\left(\overline{B}\right) = 0,04$ donc $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 0,95$ et $P_R(B) = 1 - P_R\left(\overline{B}\right) = 0,96$.
2. Arbre :



3. La probabilité que la bouteille soit correctement remplie et qu'elle ait un bouchon est :

$$\begin{array}{rcl} P(R \cap B) & = & P(R) \times P_R(B) \\ & = & 0,95 \times 0,96 \\ & = & 0,912 \end{array}$$

4. D'après la forumle des probabilités totales, la probabilité que la bouteille ait un bouchon est :

$$\begin{array}{rcl} P(B) & = & P(R \cap B) + P(\overline{R} \cap B) \\ & = & 0,912 + 0,05 \times 0,08 \\ & = & 0,912 + 0,04 \\ & = & 0,916 \end{array}$$

5. La probabilité que la bouteille soit correctement remplie sachant qu'elle a un bouchon est :

$$\begin{aligned} P_B(R) &= \frac{P(R \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,912}{0,916} \\ &\simeq 0,9956 \end{aligned}$$