Corrigé du devoir bilan 3

Exercice 1: 4 points

- f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_1'(x) = 40x^4 + 8x$
- f_2 est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f_2'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$
- f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et $f_3'(x) = \dfrac{-1}{(x-3)^2}$
- f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_4'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 2}{(x^2+1)^2}$

Exercice 2: 4 points

1. f est dérivable sur $[1; 80]$ et $f'(x) = 0,04 + \dfrac{160}{x^3}$ soit $f'(x) = \dfrac{0,04x^3 + 160}{x^3}$.
2. Sur $[1; 80]$, $0,04x^3 + 160 > 0$ et $x^3 > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où f est croissante sur $[1; 80]$.
3. Sur $[1; 80]$:
   - f est strictement croissante ;
   - f est strictement continue ;
   - $f(1) = -82,06$ et $f(80) = 1,0875$ donc $0 \in [f(1); f(80)]$

   donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [1; 80]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. $\alpha \simeq 53$
5. Signe de f sur $[1; 80]$:

x	1	α	80
$f(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 3: 12 points

Partie A : Coût moyen

1. Pour $q \in [1; 80]$, $C_M = \dfrac{0,02q^3 - 2,1q^2 + 74q + 80}{q} = 0,02q^2 - 2,1q + 74 + \dfrac{80}{q}$.
2. Pour $q \in [1; 80]$, $C_M'(q) = 0,02 \times 2q - 2,1 - \dfrac{80}{q^2} = 0,04q - 2,1 - \dfrac{80}{q^2}$
3. Comme $C_M'(q) = f(q)$, on en déduit le signe de C_M' :

x	1	α	80
C_M'	$-$	0	$+$

4. Variations :

x	1		α		80
C_M		$\searrow$		$\nearrow$	

   Le cout moyen est minimale pour $x = \alpha \simeq 53$.

Partie B : Coût marginal

1. Pour $q \in [0; 80]$, $C_m(q) = C'(q) = 0,06q^2 - 4,2q + 74$

2. C_m est une fonction polynôme de degré 2 avec $a > 0$ et $-\dfrac{b}{2a} = 35$ donc C_m admet le tableau de variations suivant :

x	0		35		80
C_M		$\searrow$		$\nearrow$	

   Le coût marginal est minimal pour $x = 35$. Il est alors de $0,5$ euro.

3. D'après la question précédente, $C_m > 0$ sur $[0;80]$.

Partie C : Bénéfice

1. $R(q) = 38q$
2. $B(q) = R(q) - C(q)$ donc après calculs on obtient $B(q) = -0,02q^3 + 2,1q^2 - 36q - 80$.
3. B est une fonction polynôme de degré 3 donc B est dérivable et $B'(x) = -0,06q^2 + 4,2q - 36$. $-0,06q^2 + 4,2q - 36$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 9$ donc $-0,06q^2 + 4,2q - 36$ admet $x_1 = 10$ et $x_2 = 60$ pour racines. De plus $a < 0$ donc B admet le tableau de variations suivant :

x	0		10		60		80
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$	-80	$\searrow$	-250	$\nearrow$	1000	$\searrow$	240

4. Sur $[10;60]$:
   - B est strictement décroissante ;
   - B est strictement continue ;
   - $B(10) = -250$ et $B(60) = 1000$ donc $0 \in [B(10); B(60)]$

   donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta \in [10;60]$ tel que $B(\beta) = 0$. De plus, d'après le tableau de variations, $B(q) < 0$ sur $[0;10]$ et $B(q) > 0$ sur $[60;80]$ donc il existe un unique $\beta \in [0;80]$ tel que $B(\beta) = 0$.
5. $\beta \simeq 24$
6. L'entreprise est bénéficiaire pour $q \in [\beta;80]$s.