

Corrigé du devoir bilan 5

Exercice 1:

4 points

$$1. \int_{-1}^3 1 + 2x + 3x^2 dx = [x + x^2 + x^3]_{-1}^3 = 39 - (-1) = 40$$

$$2. \int_0^5 2te^{t^2} dt = [e^{t^2}]_0^5 = e^{25} - e^0 = e^{25} - 1$$

Exercice 2:

5 points

$$1. f(x) = g(x) \iff 1 - x^2 = x + 1 \iff x + x^2 = 0 \iff x(x + 1) = 0 \iff x \in \{-1; 0\}.$$

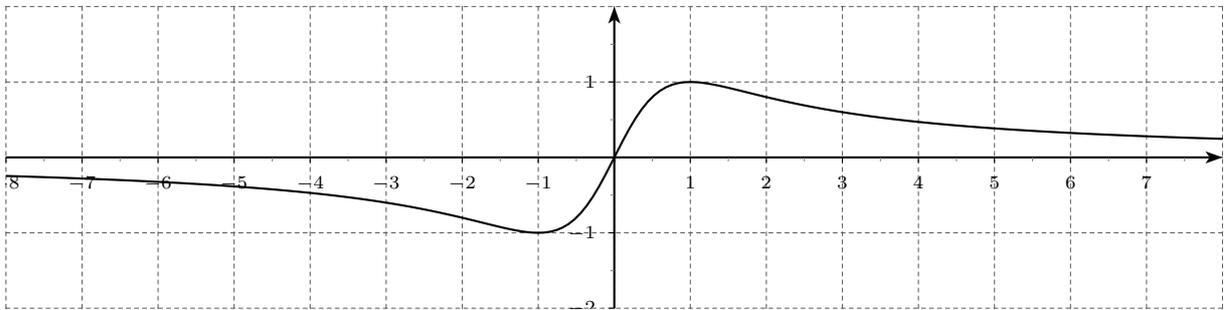
2. Sur $[-1; 0]$, C_f est au dessus de C_g donc l'aire cherchée \mathcal{A} est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-1}^0 f(x) - g(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 -x - x^2 dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 \\ &= -\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3} - \left(-\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Exercice 3:

11 points

1. Courbe (C) :



2. Sur \mathbb{R} , $1 + x^2 > 0$ donc $f(x)$ est du signe de $2x$ soit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

3. a. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1 + x^2) - 2x \times 2x}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-2(x^2 - 1)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{-2(x - 1)(x + 1)}{(1 + x^2)^2} \end{aligned}$$

b. Sur \mathbb{R} , $(1 + x^2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2(x - 1)(x + 1)$ qui est un polynôme du second degré avec -1 et 1 pour racines et $a = -2 < 0$ donc :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$

c. D'après la question précédente, on a :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f(x)$				

4. a. Par définition de F , $F'(x) = f(x)$ pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et $F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$ donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$			

b. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\
 &= \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} dt \\
 &= [\ln(1+t^2)]_0^x \\
 &= \ln(1+x^2) - \ln(1+0^2) \\
 &= \ln(1+x^2)
 \end{aligned}$$

c. Sur $[0; 10]$, $f(x) \geq 0$ donc l'aire sous la courbe, en unité d'aire, de f entre 0 et 10 est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \int_0^{10} f(t)dt \\
 &= F(10) \\
 &= \ln(1+10^2) \\
 &= \ln 101 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$