Corrigé du devoir bilan 6

Exercice 1: 4 points

1. a. L'événement « il attend le prochain bus moins de huit minutes » est $X \in]7;15] \cup]22;30]$ donc $P(X \in]7;15] \cup]22;30]) = P(X \in]7;15]) + P(X \in]22;30]) = \frac{15-7}{30} + \frac{30-22}{30} = \frac{8}{15}$

   b. L'événement « il attend le prochain bus plus de six minutes » est $X \in]0;9[\cup]15;24[$ donc $P(X \in]0;9[\cup]15;24[) = P(X \in]0;9[) + P(X \in]15;24[) = \frac{9-0}{30} + \frac{24-15}{30} = \frac{9}{15}$

2. La densité de la variable aléatoire X est définie sur $[0;30]$ par $f(x) = \frac{1}{30-0} = \frac{1}{30}$

3. $E(X) = \int_0^{30} x f(x)\mathtt{d}x = \int_0^{30} \frac{x}{30}\mathtt{d}x = \left[\frac{x^2}{60}\right]_0^{30} = 15$

Exercice 2: 16 points

1. a. La tangente à la courbe de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ en 1 a pour équation :

$$y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln(1) \Longleftrightarrow y = x - 1$$

   b. La fonction logarithme est concave.

   c. D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ et $x - 1 < x$ sur $\mathbb{R}$ d'où $\ln(x) < x$ pour $x \in]0;+\infty[$.

   d. Sur $]0;+\infty[$, $x - \ln(x) > 0$ et $x > 0$ donc $f(x)$ est strictement positif sur $]0;+\infty[$

2. a. Pour $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times (x - \ln(x)) + x\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= x - \ln(x) + x - 1 \\ &= -\ln(x) + 2x - 1 \end{aligned}$$

   b. Pour $x \in]0;+\infty[$, $\ln(x) \leq x - 1$ d'après la question 1.a. et $x - 1 \leq x + x - 1$ sur $]0;+\infty[$ donc l'inégalité est démontrée sur $]0;+\infty[$.

   c. Ainsi sur $]0;+\infty[$, $-\ln(x) + 2x - 1 \geq 0$ donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

3. a. Pour $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{x} + 2 \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{2x}{2} \\ &= \frac{2x-1}{x} \end{aligned}$$

   b. $x > 0$ sur $]0;+\infty[$ donc $f''(x)$ est du signe de $2x - 1$ d'où f est concave sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$. Le point $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right)$ est donc un point d'inflexion de la courbe de f.

4. a. A la calculatrice, on obtient une aire d'environ 1,70 u.a..

   b. Pour $x \in]0;+\infty[$,

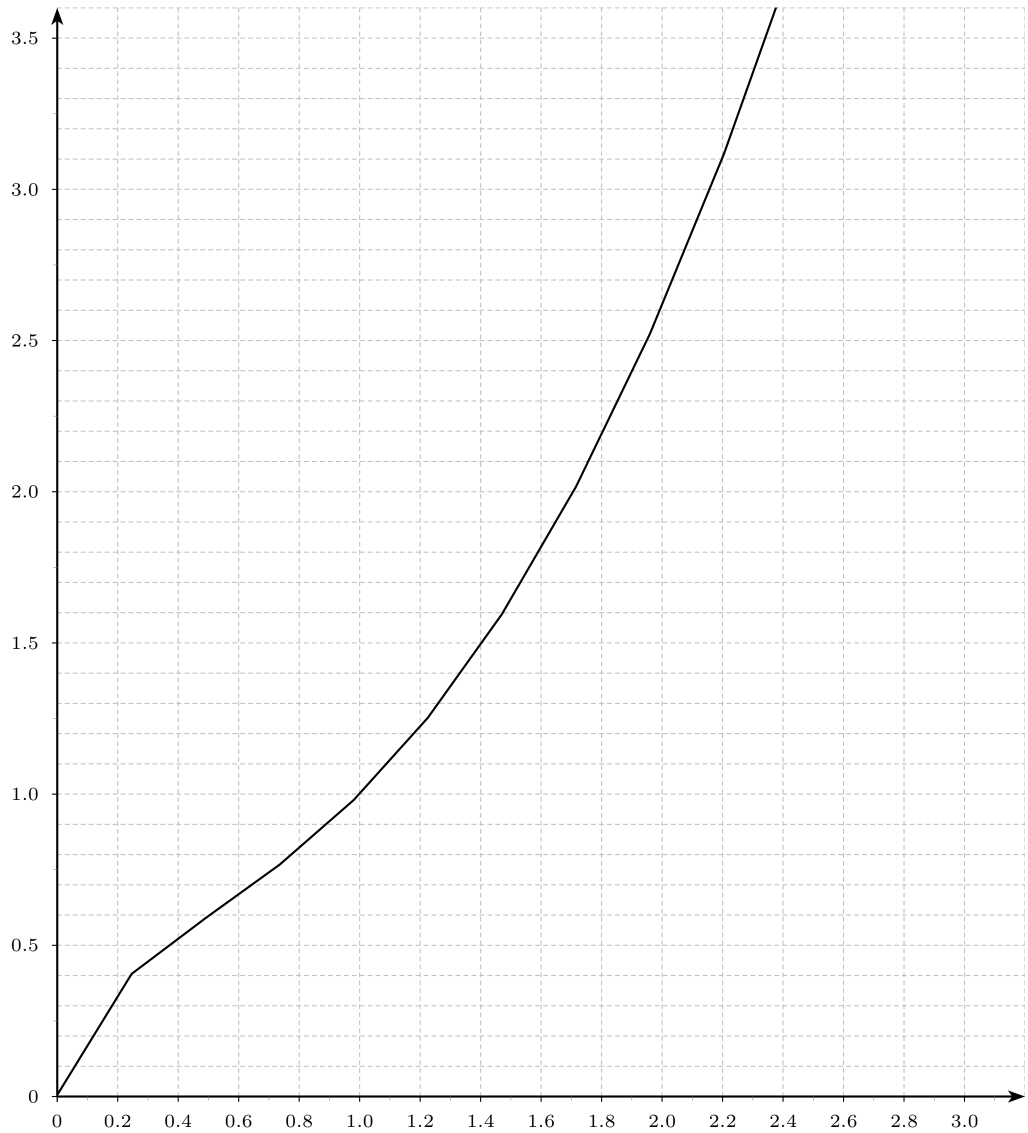
$$\begin{aligned} g'(x) &= x^2 - x\ln(x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x \\ &= x^2 - x\ln(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   Ainsi g est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

   c. La valeur exacte de l'aire sous la courbe de f pour $x \in [1;2]$ est :

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)\mathtt{d}x &= [g(x)]_1^2 \\ &= g(2) - g(1) \\ &= \frac{37}{12} - 2\ln(2) \end{aligned}$$

5. Courbe de la fonction f :


3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
2.2
2.4
2.6
2.8
3.0