Corrigé du devoir bilan 7

Exercice 1: 7 points

1. $u_1 = 166$ et $u_2 = 186$. Ces résultats doivent être donnés à l'unité.
2. a. L'**algorithme 1** est inexact puisqu'on affecte $0,6 \times U + 120$ à U au lieu de $0,4 \times U + 120$ dans la boucle **Pour**. L'**algorithme 2** est lui inexact puisqu'on ré-initialise U par 115 à chaque fois que l'on passe dans la boucle **Pour** et on affecte $0,4 \times U + 115$ à U au lieu de $0,4 \times U + 120$ dans la boucle **Pour**.

   b. $u_{n+1} = 0,4u_n + 120$
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.

   a. Pour tout entier n,
$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} - 200 \\ & = & 0,4u_n + 120 - 200 \\ & = & 0,4u_n - 80 \\ & = & 0,4\,(u_n - 200) \\ & = & 0,4v_n \end{array}$$
   On en déduit que (v_n) est une suite géométrique de raison $0,4$ avec $v_0 = -85$.

   b. D'après la question précédente, $v_n = -85 \times 0,4^n$.

   c. Pour tout entier n, $v_n = u_n - 200$ donc $u_n = v_n + 200$ soit $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.

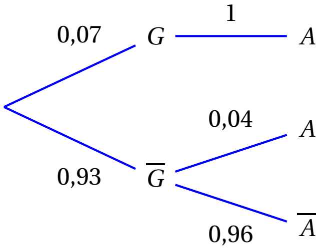
   d. $-1 < 0,4 < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} 0,4^n = 0$ ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_n = 200$.
   (u_n) est croissante et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 200$ donc le nombre d'oiseaux ne dépassera jamais 200. La capacité d'accueil du centre est donc suffisante.
4. La somme perçue est :
$$\begin{array}{rcl} S & = & 20 \times (u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \\ & = & 21180 \end{array}$$
   ou
$$\begin{array}{rcl} S & = & 20 \times \displaystyle\sum_{k=0}^{5} u_k \\ & = & 20 \times \left(\sum_{k=0}^{5} 200 - 85 \sum_{k=0}^{5} 0,4^k\right) \\ & = & 20 \times \left(200 \times 6 - 85 \times \dfrac{1 - 0,4^6}{1 - 0,4}\right) \\ & \simeq & 21178 \end{array}$$

Exercice 2: 6 points

1. La proposition est fausse. $h'(-1)$ est le coefficient directeur de la droite (AB) (et pas son ordonnée à l'origine) soit -6.
2. La proposition est fausse. Sur $[1.4]$, $f''(x) \leq 0$ donc f est concave sur cet intervalle.
3. La proposition est vraie. En effet,
$$e^{5\ln 2} \times e^{7\ln 4} = e^{\ln 2^5} \times e^{\ln 4^7} = 2^5 \times 4^7 = 2^5 \times (2^2)^7 = 2^5 \times 2^{14} = 2^{19}$$
4. La proposition est vrai. L'aire sous la courbe correspond à $\int_1 2g(x)\mathrm{d}x = G(2) - G(1)$ où G est une primitive de g. Or $G(2) = 5$ et $G(1) = 1$ donc $\int_1 2g(x)\mathrm{d}x = 4$.

Exercice 3: 7 points

1. a.



   b. D'après la formule des probabilités totales, $P(A) = P(A \cap G) + P(A \cap \overline{G}) = P(G)P_G(A) + P\left(\overline{G}\right)P_{\overline{G}}(A) = 0,1072$.

   c. $P_A(G) = \dfrac{P(A \cap G)}{P(A)} \simeq 0,653$

2. a. X suit une loi $\mathcal{N}(14;3,5^2$ donc $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0,95$ soit $P(7 \leqslant X \leqslant 21) \approx 0,95$.

   b. $P(X \geq 10) \simeq 0,873$

   c. $P(X \leq 20) \simeq 0,957$

3. L'intervalle de fluctuation asymptotique associé à la probabilité de $0,22$ est :

$$I = \left[0,22 - 1,96 \times \frac{\sqrt{0,22 \times 0,78}}{\sqrt{200}};0,22 + 1,96 \times \frac{\sqrt{0,22 \times 0,78}}{\sqrt{200}}\right] = [0,162, 0,278]$$

   Or la fréquence observée f est $f = \dfrac{28}{200} = 0,14$ et $f \notin I$ donc l'enquête remet en cause l'affirmation d ela mutuelle au seuil de $0,95$.