

Corrigé du devoir maison 1

Exercice 1:

3 points

1. $x^2 + 5x + 7$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = -3$ donc $x^2 + 5x + 7 = 0$ n'admet aucune solution.
2. $x^3 - 2x^2 = 3x \iff x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \iff x(x^2 - 2x - 3) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 2x - 3 = 0$. Or $x^2 - 2x - 3$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 16$ donc $x^2 - 2x - 3$ admet $x_1 = -1$ et $x_2 = 3$ pour racines. Ainsi $x^3 - 2x^2 = 3x \iff x \in \{-1; 0; 3\}$

Exercice 2:

3 points

1. $-2x^2 + 3x + 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 17$ donc $-2x^2 + 3x + 1$ admet $x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$ pour racines. De plus $a < 0$ donc $-2x^2 + 3x + 1$ admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$-2x^2 + 3x + 1$		$-$	$+$	$-$

On peut donc conclure que $-2x^2 + 3x + 1 \leq 0$ pour $x \in]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$

2. Pour tout réel $x \neq 2$,

$$\frac{x+3}{x-2} > x \iff \frac{x+3}{x-2} - x > 0 \iff \frac{x+3}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2} > 0 \iff \frac{x+3-x^2+2x}{x-2} > 0 \iff \frac{-x^2+3x+3}{x-2} > 0$$

$-x^2 + 3x + 3$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 21$ donc $-x^2 + 3x + 3$ admet $x_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$ pour racines. De plus $a < 0$ donc $-x^2 + 3x + 3$ admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$-x^2 + 3x + 3$		$-$	$+$	$-$

On remarque que $2 \in]x_1; x_2[$ donc :

x	$-\infty$	x_1	2	x_2	$+\infty$
$-x^2 + 3x + 3$		$-$	$+$	$+$	$-$
$x - 2$		$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-x^2 + 3x + 3}{x - 2}$		$+$	$-$	$+$	$-$

On peut donc conclure que $\frac{x+3}{x-2} > x$ pour $x \in]-\infty; x_1[\cup]2; x_2[$

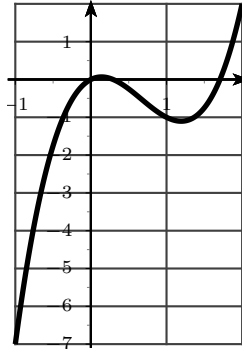
Exercice 3:

8 points

1. Les antécédents de 0 par f sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$:
 $f(x) = 0 \iff 2x^3 - 4x^2 + x = 0 \iff x(2x^2 - 4x + 1) = 0 \iff x = 0$ ou $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Or $2x^2 - 4x + 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 8$ donc $2x^2 - 4x + 1$ admet $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour racines. Ainsi $f(x) = 0 \iff x \in \{0; x_1; x_2\}$
2. f est une fonction polynôme de degré 3 donc f est dérivable et $f'(x) = 6x^2 - 8x + 1$. $6x^2 - 8x + 1$ est un polynôme du second degré avec $\Delta = 40$ donc $6x^2 - 8x + 1$ admet $x_1 = \frac{4 - \sqrt{10}}{6}$ et $x_2 = \frac{4 + \sqrt{10}}{6}$ pour racines. De plus $a > 0$ donc f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

3. Courbe de la fonction f :



4. La tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 1 a pour équation : T a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= -1(x-1) - 1 \\ y &= -x \end{aligned}$$

Elle passe donc par l'origine (son ordonnée à l'origine est nulle!).

Exercice 4:

4 points

- Réponse B. (u_n) est géométrique de raison 2 et $u_0 = -3$ donc $u_5 = -3 \times 2^5 = -96$.
- Réponse C. (u_n) est arithmétique de raison 3 et $u_0 = -1$ donc $u_{100} = -1 + 3 \times 100 = 299$.
- Réponse B. $2^{18} = 262144$ donc $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 262144 = S_{18}$ où (u_n) est géométrique de raison 2 et $u_0 = 1$. Ainsi $S_{18} = \frac{1-2^{19}}{1-2} = 2^{19} - 1 = 524287$.
- Réponse C. $X \hookrightarrow B(10, \frac{1}{2})$ donc $E(X) = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

Exercice 5:

points

1. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} u_5 = 210 \\ u_{10} = 84 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + 5r = 210 \\ u_0 + 10r = 84 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 + 5r = 210 \\ 5r = -126 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = \frac{336}{5} \\ r = -\frac{126}{5} \end{cases}$$

2. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} u_1 = 27 \\ u_4 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 q = 27 \\ u_0 q^4 = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = \frac{27}{q} \\ q^3 = \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases} \iff \begin{cases} u_0 = \frac{81}{2} \\ q = \frac{2}{3} \end{cases}$$