Corrigé du devoir maison 4

Exercice 1: 8 points

1. Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc cette équation n'admet pas de solution.
2. $e^{-x^2-8x} = 1 \iff e^{-x^2-8x} = e^0 \iff -x^2 - 8x = 0$. Or $-x^2 - 8x = 0 \iff -x(x+8) = 0$ donc cette équation admet -8 et 0 pour solutions.
3. $e^{11+6x} < e^{5x-8} \iff 11 + -x < 5x - 8 \iff x < -19$.
4. $e^{5x^3+6x} > \dfrac{1}{e^{-x^3+2x^2}} \iff e^{5x^3+6x} > e^{x^3-2x^2} \iff 5x^3 + 6x > x^3 - 2x^2 \iff 4x^3 + 2x^2 + 6x > 0 \iff x(4x^2 + 2x + 6) > 0$.
   Or $4x^2 + 2x + 6$ est un polynôme du second degré avec $a > 0$ et $\Delta < 0$ donc $4x^2 + 2x + 6 > 0$ pour tout réel x d'où $x(4x^2 + 2x + 6) > 0$ pour $x > 0$. Ainsi $e^{5x^3+6x} > \dfrac{1}{e^{-x^3+2x^2}}$ pour $x > 0$.

Exercice 2: 12 points

1. a. Variations de la fonction $g : x \longmapsto 8 - x^3$:
   $g'(x) = -3x^2 < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

   b. g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et $g(2) = 0$ donc l'équation $8 - x^3 = 0$ admet 2 pour unique solution sur $\mathbb{R}$.

   c. $1 + x^2 > 0$ donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc g admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

2. a. Variations de la fonction $h : x \longmapsto x^3 + 3x + 16$:
   $h'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$ donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b. h est continue sur $[-3; -2]$, strictement croissante sur $[-3; -2]$, $h(-3) = -20$ et $h(-2) = 2$. $0 \in [-20; 2]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3; -2]$.

   c. h est croissante sur $\mathbb{R}$ donc h admet le tableau de signe suivant :

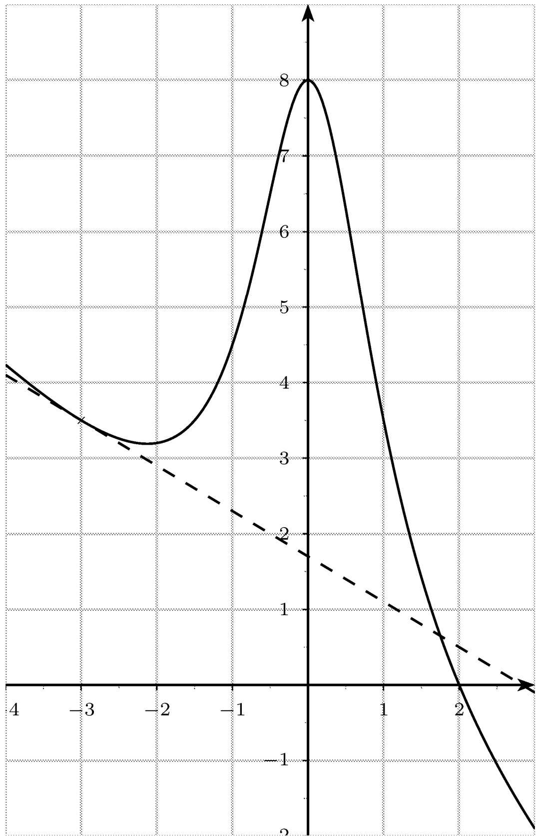
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

   d. $\alpha \simeq -2,127$

   e. $1 + x^2 > 0$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et après calculs, on obtient que $f'(x) = \dfrac{-x(x^3 + 3x + 16)}{(1 + x^2)^2}$. Ainsi :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x^3 + 3x + 16$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	8	$\searrow$	

3. Courbe :



4. T a pour équation $y = f'(-3)(x+3) + f(-3)$ soit $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{17}{10}$.

5. f est dérivable en -3 donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = f'(-3) = -\dfrac{3}{5}$