Devoir maison 5

Exercice 1: 5 points

Pour chaque question, choisir la bonne réponse en justifiant le plus précisement votre choix :

1. Pour tout réel a non nul, le nombre réel $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :

a. $-\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$ **b.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}$ **c.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a}}$ **d.** e^{a}

2. Pour tout réel a, le nombre réel $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$ est égal à :

a. $\sqrt{\mathrm{e}^{a}}$ **b.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{2}$ **c.** $\dfrac{\mathrm{e}^{a}}{\mathrm{e}^{2}}$ **d.** $\mathrm{e}^{\sqrt{a}}$

3. Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right)$ est égal à :

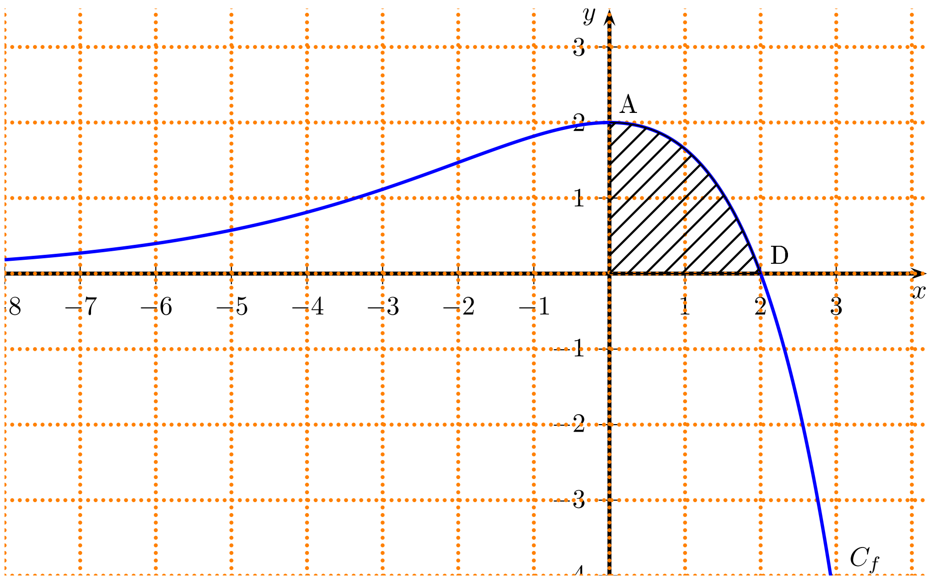
a. $\ln(x)$ **b.** $-\ln(-x)$ **c.** $-\ln(x)$ **d.** $\dfrac{1}{\ln(-x)}$

4. On donne la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x)$. La dérivée de f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 1$ **b.** $f'(x) = \ln(x)$ **c.** $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ **d.** $f'(x) = \ln(x) + 1$

Exercice 2: 9 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.



Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)\mathrm{e}^{ax}$ où a et b désignent deux constantes. On sait que :

- Les points $\mathrm{A}(0\,;\,2)$ et $\mathrm{D}(2\,;\,0)$ appartiennent à la courbe C_f.
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 = 0 \\ ab - 1 = 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x+2)e^{0,5x}$.

1. A l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ est comprise entre 2 et 4.
2. a. On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x+8)e^{0,5x}$. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x)\,dx$ et en donner une valeur approchéée à 10^{-2} près.
3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   Parmi les trois courbes C_1, C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G.
   Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

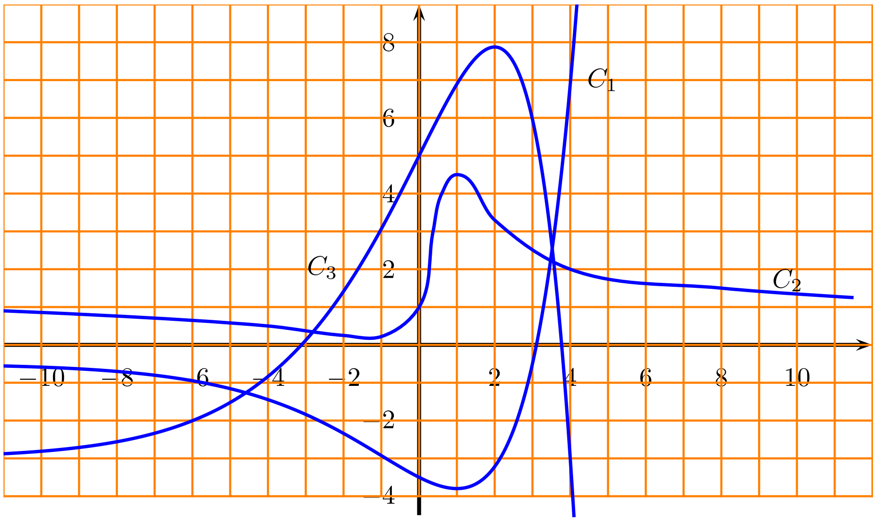


Figure 2

Exercice 3: 4 points

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-5}^5 t^2 - 25\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} 2e^{3t}\mathrm{d}t$