Corrigé du devoir maison 5

Exercice 1: 5 points

1. Pour tout réel a non nul, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{a}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\left(-\frac{1}{a}\right)}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}}$
2. Pour tout réel a, $\mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = (\mathrm{e}^{a})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^{a}}$:
3. Pour tout réel $x < 0$, $\ln\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \ln 1 - \ln(-x) = -\ln(-x)$
4. Pour $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x\ln(x)$ donc $f(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$

Exercice 2: 9 points

Partie A

1. $f(2) = 0$ et $f'(0) = 0$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{ax} + (b-x)ae^{ax} = (ab - 1 - ax)e^{ax}$.
3. $f(2) = 0 \Longrightarrow (b-2)e^{a\times 2} = 0 \Longrightarrow b - 2 = 0$ puisque $e^{2a} > 0$ et $f'(0) = 0 \Longrightarrow (ab - 1 - a \times 0)e^{a\times 0} \Longrightarrow ab - 1 = 0$
4. On a immédiatemment $b = 2$ donc $a = \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$ d'où $f(x) = (2-x)e^{\frac{x}{2}}$ pour tout réel x.

Partie B

1. L'aire sous la courbe de f entre 0 et 2 est supérieure à l'aire du triangle ADO qui est de 2 et inférieure au carré de côté OD qui est de 4.
2. a. Pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -2\mathrm{e}^{0,5x} + (-2x+8)0,5\mathrm{e}^{0,5x} = (2-x)\mathrm{e}^{0,5x}$ donc F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

   b. $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(0) = 4e - 8 \simeq 2,87$.
3. f est positive sur $]-\infty;2]$ donc G est croissante sur $]-\infty;2]$ donc C_3 est la courbe de G.

Exercice 3: 4 points

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2t}{t^2+1}\mathtt{d}t = \left[ln(t^2+1)\right]_1^3 = ln10 - ln2 = ln5$
2. $\displaystyle\int_{-5}^5 t^2 - 25\mathtt{d}t = \left[\frac{t^3}{3} - 25t\right]_{-5}^5 = -\frac{500}{3}$
3. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} 2e^{3t}\mathtt{d}t = \left[\frac{2}{3}e^{3t}\right]_0^{ln3} = \frac{52}{3}$