

Devoir maison 6

Exercice 1:

14 points

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$

1. Exprimer $f\left(\frac{1}{4}\right)$ en fonction de $\ln 2$.

2. Déterminer le signe de f .

3. Déterminer les variations de f .

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

5. Déterminer l'entier n tel que $n < \alpha < n + 1$.

6. Soit F la fonction définie sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$ par :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

a. Déterminer $F(2)$ à l'aide de votre calculatrice. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Etudier les variations de F sur $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$.

Exercice 2:

6 points

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 12(x^3 - x^5)$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire dont la loi admet f pour densité.

a. Calculer $P\left(X \in \left[0; \frac{1}{4}\right]\right)$.

b. Calculer $E(X)$.