Corrigé du devoir maison 6

Exercice 1: 14 points

1. Après calculs, on a : $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}ln(2)$
2. $x^2 > 0$ sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ donc $f(x)$ est du signe de $ln(x)$ soit :

x	$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3. f est dérivable sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ et $f'(x) = 2xln(x) + x = x\left[2ln(x)+1\right]$. Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $2ln(x)+1$ sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.
   Or $2ln(x)+1 = 0 \iff x = e^{-\frac{1}{2}}$ donc :

x	$\frac{1}{4}$		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	

   En effet, $f(e^{-\frac{1}{2}}) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{e^{-1}}{2}$

4.
   - Sur $\left[\frac{1}{4};e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $f(x) \leq 0$
   - Sur $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$, f est une fonction continue, strictement croissante. $2 \in \left[f(e^{-\frac{1}{2}}); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α
   - $f(x) = 2$ admet donc α comme unique solution sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.
5. $n = 1$ pusique $f(1) < 2$ et $f(2) > 2$.
6. a. $F(2) \simeq 1,07$. $f(x) \geq 0$ sur $[1;2]$ donc l'aire, en unité d'aire, sous la courbe de la fonction f entre 1 et 2 est d'envrion $1,07$.

   b. Sur $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$, $F'(x) = f(x)$ donc :

x	$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 2: 6 points

1.
   - f est continue sur $[0;1]$;
   - $f(x) = 12x^3(1-x^2)$. Sur $[0;1]$, $1-x^2 \geq 0$ et $12x^3 \geq 0$ donc $f(x) \geq 0$;
   -

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\mathtt{d}x &= \int_0^1 12\left(x^3 - x^5\right)\mathtt{d}x \\ &= \left[3x^4 - 2x^6\right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Ainsi, f est une densité de probabilité.

2. a.

$$\begin{aligned} P\left(X \in \left[0; \frac{1}{4}\right]\right) &= \int_0^{\frac{1}{4}} f(x)\mathtt{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} 12\left(x^3 - x^5\right)\mathtt{d}x \\ &= \left[3x^4 - 2x^6\right]_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{23}{2048} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 xf(x)\mathtt{d}x \\ &= \int_0^1 12\left(x^4 - x^6\right)\mathtt{d}x \\ &= \left[\frac{12}{5}x^5 - \frac{12}{7}x^7\right]_0^1 \\ &= \frac{24}{35} \end{aligned}$$