Corrigé du devoir maison 7

1. a. La tangente à la courbe de la fonction $x \longmapsto e^x$ en 0 a pour équation :

$$y = e^0(x-0) + e^0 \Longleftrightarrow y = x+1$$

La fonction exponentielle est convexe donc pour tout réel x, $e^x \geq x+1$ et $x-1 < x+1$ sur $\mathbb{R}$ d'où $e^x > x-1$ sur $\mathbb{R}$.

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x - x + 1 = e^x - (x-1)$. Or $e^x - (x-1) > 0$ sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente d'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. a. f est continue et strictement croissante sur $[-2;-1]$. De plus $f(-2) < 0$ et $f - 1) > 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-2;-1]$.

b. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

3. a. f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = e^x - 1$. Or $e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 1 \Longleftrightarrow x > 0$ donc f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$

b. $A(0;f(0))$ soit $A(0;3)$ est un point d'infexion de la courbe de la fonction f.

4. $F(x) = e^x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{x^2}{2} + 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t &= F(2) - F(0)\\ &= e^2 - \frac{8}{6} + \frac{4}{2} + 4 - 1\\ &= e^2 + \frac{11}{3}\end{aligned}$$

5. Courbe de la fonction f sur $[-4;2]$: