Terminales S - BACCALAUREAT BLANC

24 janvier 2012

Épreuve de

MATHÉMATIQUES

(OBLIGATOIRE)

Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisée.
Sujet de 4 pages.

EXERCICE 1 — 4 points

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   (a) Vérifier que $P(X = 0) = \dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   (c) Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante : *si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.*
   (a) En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :
   B : « seule la première boule tirée est verte »,
   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».
   (b) Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

PARTIE A - Restitution organisée des connaissances

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.

On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et que pour tout x de $]0~;~+\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.

À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ qui à x associe $\dfrac{1}{x}$.

PARTIE B - Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}.$$

Le but du problème est l'étude de cette fonction.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ d'unité graphique 3 cm.

I - Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

1. Étudier les variations de g sur $]0~;~+\infty[$.
2. En déduire le signe de g sur $]0~;~+\infty[$.

II - Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative $\mathcal{C}$

1. Déterminer la limite en 0 de la fonction f. Quelle est l'interprétation graphique de ce résultat ?
2. Déterminer la limite en $+\infty$ de f puis montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0~;~+\infty[$.
4. En déduire le sens de variation de f sur $]0~;~+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Déterminer le point A de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente $\mathcal{T}$ est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
6. Dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ tracer les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

EXERCICE 3 **5 points**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 2 + 2\mathrm{i}$, $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{C}} = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.

   La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que OH < OK. On note z_{H} et z_{K} les affixes respectives des points H et K,

   (a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

   (b) Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

   (c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que : $z_{\mathrm{K}} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ et $z_{\mathrm{H}} = \left(2\sqrt{2} - 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-4}{z}.$$

2. (a) Déterminer et placer B' et C' les points images de B et C par f.

   (b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.

3. (a) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$$\mathrm{O}M \times \mathrm{O}M' = 4.$$

   (b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K′ et H′ les images respectives de K et H par f.

   (a) Calculer OK′ et OH′.

   (b) Démontrer que $z_{\mathrm{K}'} = \left(2\sqrt{2} - 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{\mathrm{H}'} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

   (c) Expliquer comment construire les points K′ et H′ en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Soit f la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - 1.$$

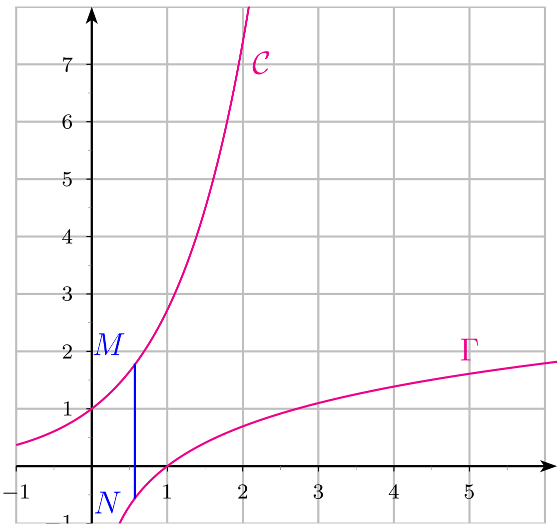
   (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

   (c) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

   Les courbes $\mathcal{C}$ et Γ sont donnée ci-dessous



   Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

   On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $\mathrm{e}^x > \ln(x)$.

   (a) Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$.
   Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

   (b) En utilisant la question **1.**, montrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$.
   En déduire que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.