Chapitre 10: Dénombrement

1 Factorielle

Définition:

- *Soit n un entier naturel non nul, on note $n!$ que l'on lit « n factorielle »ou « factorielle n »le produit suivant :*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

- *Par convention,* $0! = 1$.

Exemple:
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Propriété:
$n!$ est le nombre de façons de ranger n éléments.

Exercice 1:

1. Combien d'anagrammes possède le mot BAC ? Les écrire.
2. Combien d'anagrammes possède le mot MOQUET ?

Exercice 2:
Simplifier les expressions suivantes :

1. $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
2. $n!(n+1) - (n+1)!$
3. $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$
4. $\dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!}$

2 Listes

2.1 Tirages successifs avec remise

Une urne contient n boules numérotées. On tire une boule, on note son numéro puis on la remet dans l'urne. On effectue alors p tirages (dits successifs avec remise).

Propriété:
Le nombre de listes de longueurs p formées des numéros des boules est n^p.

Exercice 3:
Une urne contient 5 boules numérotées de 0 à 4. On tire successivement trois boules avec remise. Déterminer le nombre de tirage possibles.

Exercice 4:
Déterminer le nombre de façons d'écrire un mots à 2 lettres à partir des lettres a, b, c, d et e puis déterminer le nombre de mots à 2 lettres que l'on peut écrire à l'aide des 26 lettres de l'alphabet (ayant un sens ou non).

2.2 Tirages successifs sans remise

Propriété:
Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre de listes formées de p éléments de E est égal à :

$$n \times (n-1)... \times (n-(p-1)).$$

Remarque:
- *On utilise cette formule pour dénombrer le nombres de possibilités quand on tire* ***successivement*** *p fois dans une urne remplie de n boules.*
- *Concrètement, on a n possibilités pour le premier élément puis $n-1$ possibilités pour le deuxième puis ... $n-(p-1)$ possibilités pour le p-ième ; ce qui « explique »la formule.*
- *Ici, l'ordre des éléments est important.*
- *on a $n \times (n-1)... \times (n-(p-1)) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.*

Exercice 5:
Une urne contient 5 boules numérotées de 0 à 4. On tire successivement trois boules sans remise. Déterminer le nombre de tirage possibles.

Exercice 6:
Déterminer le nombre de façons d'écrire un mots à 2 lettres à partir des lettres a, b, c, d et e (en n'utilisant qu'une fois chaque lettre) puis déterminer le nombre de mots à 2 lettres (en n'utilisant qu'une fois chaque lettre) que l'on peut écrire à l'aide des 26 lettres de l'alphabet (ayant un sens ou non).

3 Tirages simultanés - Combinaisons

Propriété:
- *Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.*
  Le nombre de sous-ensembles à p éléments de E est égal à :

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

- *C'est le nombre de façons de choisir p éléments parmi n sans notion d'ordre.*
- *On le note $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$ qui se lit « p parmi n ».*
- *On dit aussi que c'est le nombre de combinaisons de p éléments parmi n.*

Remarque:
On utilise cette formule pour dénombrer le nombres de possibilités quand on tire ***simultanément*** *p boules dans une urne remplie de n boules (**l'ordre n'a alors pas d'importance**).*

Exercice 7:
Une urne contient 10 boules numérotées de 0 à 9. On tire simultanément trois boules. Déterminer le nombre de tirage possibles.

Propriété:
n et p sont des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$

- $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right) = 1$;
- $\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-1 \end{array} \right) = n$ *pour* $n \geqslant 1$;
- $\left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n-p \end{array} \right)$;
- $\left(\begin{array}{c} n-1 \\ p-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ p \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right)$.

Exercice 8:
Démontrer ces propriétés.

4 Triangle de Pascal

À l'aide de la dernière propriété, on peut construire un tableau nous donnant $\binom{n}{p}$. Compléter ce tableau que l'on appelle le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1		1		
3	1			1	
4	1				1

Exercice 9:
Un sac contient les sept lettres du mot LOUTRES. On pourra éventuellement imaginer des arbres pour répondre aux questions posées.

1. Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) peut-on écrire avec ces sept lettres ?
2. On tire cinq lettres, les unes après les autres, et on les pose côte à côte.
   a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b. En permutant l'ordre, si nécessaire, combien de tirages permettent d'écrire le mot LOTUS ?
3. On tire une lettre, on la note et on la remet dans le sac, puis on recommence jusqu'à ce que cinq lettres aient été tirées.
   a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b. Combien de tirages permettent d'écrire le mot LOTUS si on autorise à permuter l'ordre ?
4. On tire au hasard et simultanément deux lettres du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles.
5. On tire au hasard et simultanément trois lettres du sac. Déterminer le nombre de tirages possibles.
6. On tire au hasard et simultanément cinq lettres du sac.
   a. Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b. Combien de tirages permettent d'écrire le mot lotus ?

Exercice 10:
À la cantine d'un lycée, on propose au choix : 2 entrées, 3 plats chauds, 2 fromages et 4 desserts. Combien y-a-t-il de repas possibles ?

Exercice 11:
L'entrée d'un immeuble est protégé par un code formé de 4 symboles parmi les deux lettres A et B et les dix chiffres de 0 à 9. Xavier a oublié le code.

1. a. Déterminer le nombre de codes possibles.
   b. En déduire la probabilité de trouver le bon code au hasard.
2. a. Combien y-a-t-il de codes formés des chiffres 1, 7, 8 et 9.
   b. En déduire la probabilité de composer un de ces codes.
3. Xavier se souvient que le code commence par une lettre suivie de 3 chiffres différents. Il compose au hasard un tel code.
   a. Combien y-a-t-il de codes possibles ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il tape un code qui commence par A et finisse par 9 ?

Exercice 12:
Dans une classe de 30 élèves dont 17 filles et 13 garçons, on doit élire 4 délégués.

1. Combien y-a-t-il de possibilités ?
2. Si l'on doit avoir obligatoirement deux filles et deux garçons pour les délégués, combien y-a-t-il de possibilités ?

Exercice 13:

L'équipe de basket d'un lycée doit disputer un match. 8 élèves ont été sélectionnés parmi lesquels figure Jean. Pour un match, l'entraîneur choisit au hasard cinq joueurs parmi les 8 sélectionnés. On appelle « cinq »cette équipe de cinq joueurs.

1. Combien l'entraîneur peut-il faire de cinq différents ?
2. Démontrer que la probabilité que Jean fasse partie du cinq est $\frac{5}{8}$.

Exercice 14:

Une urne contient 5 boules blanches et 4 boules noires. On tire **simultanément** 3 boules dans cette urne.

1. Combien a-t-on de tirages possibles ?
2. Dénombrer le nombre de tirages dans lesquels on a 3 boules blanches et en déduire la probabilité de tirer 3 boules blanches.
3. Quelle est la probabilité de tirer 3 boules de même couleur ?

5 Formule du binôme

Soit a et b deux nombres (réels ou même complexes) et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercice 15:

Développer les expressions suivantes :

1. $(a+b)^3$
2. $(a-b)^4$
3. $(1-x)^3$