De la loi de Bernoulli à la loi binomiale

Exercice 1:

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S) et l'autre échec $(\overline{S})$ avec $P(S) = p$ et $P\left(\overline{S}\right) = 1 - p$.

Les expériences aléatoires suivantes sont-elles des épreuves de Bernoulli ? Si oui, préciser leur paramètre (si ce n'est pas clairement indiqué, vous choisirez quelle issue correspond au succès et quelle issue correspond à l'échec).

1. On lance un dé équilibré et on gagne si on fait un 6.
2. On lance un dé tétraèdrique et on regarde le résultat obtenu.
3. Un automobiliste arrive à un feu et a une probabilité de 0,3 qu'il soit vert.
4. On tire deux boules dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges. On gagne si elles sont noires.

Exercice 2:

On considère l'épreuve aléatoire : « on tire une boule dans une urne qui contient 4 boules noires et 6 boules rouges »et on s'intéresse à la sortie d'une boule rouge.

1. L'expérience aléatoire suivante est-elle une épreuve de Bernoulli ?
2. Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. Donner la loi de probabilité de X.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X

Exercice 3:

On considère l'épreuve aléatoire : « on lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces »et on s'intéresse au nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des quatre lancers.

1. L'expérience aléatoire suivante est-elle une épreuve de Bernoulli ? Préciser.
2. A l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X indiquant le nombre de fois où le numéro 6 est sorti lors des quatre lancers.
3. On se propose de retrouver ces résultats en utilisant les techniques de dénombrement.
   a. Dénombrer le nombre de tirage contenant 0, 1, 2, 3 et 4 six.
   b. Déterminer la probabilité d'un tirage contenant 0, 1, 2, 3 et 4 six.
   c. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   d. Montrer en utilisant la formule du binôme que :

$$\sum_{i=0}^{4} P(X = i) = 1$$

   On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** $n = 4$ **et** $p = \dfrac{1}{6}$. De plus $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
4. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4:

1. Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de $0,3$. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par p_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs. Déterminer la valeur minimale de n pour que p_n soit supérieure ou égale à $0,9$.
2. Un joueur dispose d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. À chaque lancer, il gagne s'il obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 ; il perd s'il obtient 1. Une partie est constituée de 5 lancers du dé successifs et indépendants. Déterminer la probabilité pour que le joueur perde 3 fois au cours d'une partie.
3. Soient A et B deux évènements indépendants d'une même univers Ω tels que $p(A) = 0,3$ et $p(A \cup B) = 0,65$. Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 5:

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne. Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.
   Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
   En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
   On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».
   Déterminer la probabilité des évènements A et B.
2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.
   Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.
   On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est $0,7$ s'il s'agit d'une question d'histoire, $0,6$ s'il s'agit d'une question de littérature et $0,5$ pour une question sur le sport.
   On considère les évènements suivants :
   H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
   L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
   S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
   C : « le candidat répond correctement à la question posée »
   a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.
   b. Calculer la probabilité de l'évènement C.
   c. Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?
3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à $0,7$.
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.
   a. Soit k un entier compris entre 0 et 10.
   Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.
   b. Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

Exercice 6:

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ». $\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. a. Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3. a. Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.