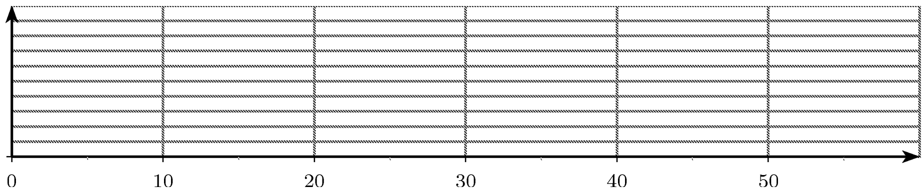
Du discret au continu

Exercice 1:

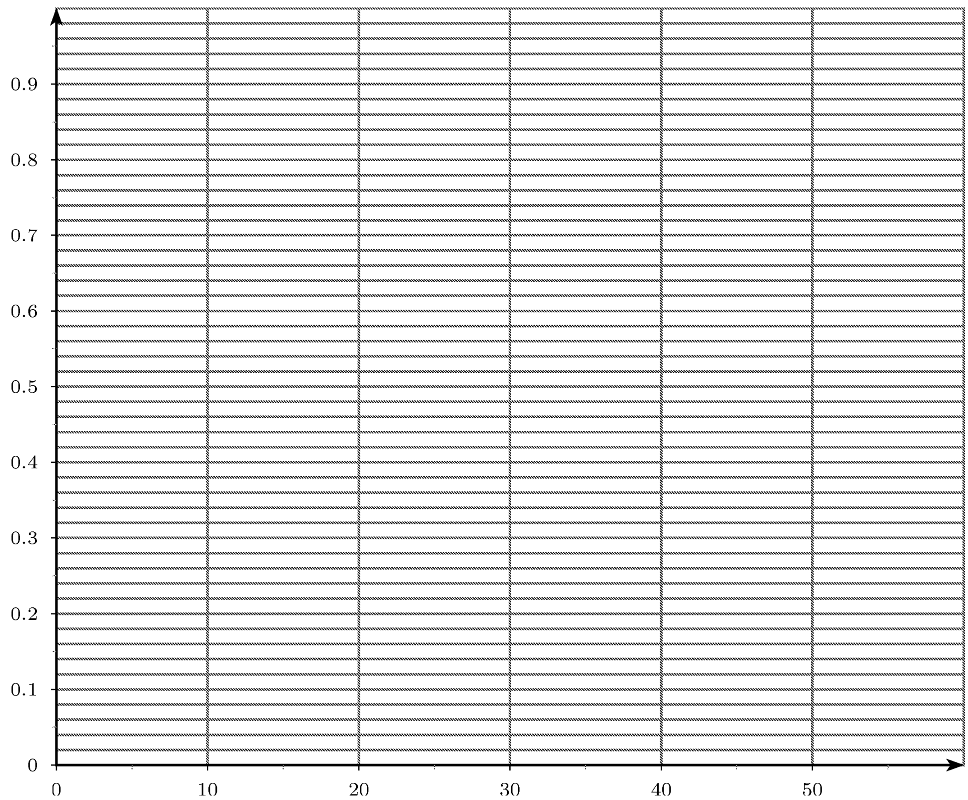
On a étudié le temps mis par les élèves d'un lycée pour effectuer le trajet domicile-lycée. Cette étude a conduit aux résultats suivants :

temps (min)	$[0;10[$	$[10;20[$	$[20;30[$	$[30;40[$	$[40;50[$	$[50;60[$
fréquence	$0,1$	$0,18$	$0,31$	$0,28$	$0,1$	$0,03$
f.c.c.						

1. Tracer l'histogramme des fréquences dans le repère ci-dessous :



2. Tracer la courbe des fréquences cumulées croissantes (f.c.c.) dans le repère ci-dessous :



3. On choisit au hasard un élève dans cette population, notons X le temps du trajet domicile-lycée. Les valeurs possibles de X appartiennent à l'intervalle $[0;60[$.

   a. Déterminer la probabilité que la valeur X soit inférieur à 40.

   b. Déterminer l'aire de la partie de l'histogramme pour $x \in [0;40[$. Conclure.

   c. Déterminer la probabilité que la valeur X soit compris entre à 20 et 50.

   d. Déterminer la probabilité que la valeur X soit supérieur 30.

   De manière générale, si $x \in [0;60[$, on peut déterminer la probabilité $P(X < x)$. Cette probabilité est la valeur de l'aire de la partie de l'histogramme située avant la valeur x (l'aire totale étant 1 unité) ou encore la valeur de la fréquence cumulée croissante correspondant à x. On obtient alors que :

$$P(X < x) = \int_0^x f(t)\mathtt{d}t$$

   La fonction f est appelée **densité de probabilité** de X.

4. Déterminer f dans l'exemple suivant.

Un peu de cours...

Une densité de probabilité f associé à une variable aléatoire X est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points, positive et telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$$

On a alors :

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

et

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$$

Exercice 2:

On tire au hasard sur une cible de rayon 1 mètre sans jamais la manquer. X est la variable aléatoire qui donne la distance de l'impact au centre. On admet que X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x \in [0;1] \\ 0 & si \quad x \notin [0;1] \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Tracer la courbe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $P(X < 0,5)$, $P(X \geq 0,5)$, $P(0,2 \leq X \leq 0,8)$, et $P(X = 0,5)$.
4. Vérifier que si $0 \leq a < b < 1$ alors $P(a \leq X \leq b)$ est égale au rapport de l'aire de la couronne, définie par a et b et celle de la cible.

Exercice 3:

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur $[a;b]$ lorsque sa densité f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \quad x \in [a;b] \\ 0 & si \quad x \notin [a;b] \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Tracer la courbe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $P(\alpha \leq X \leq \beta)$

Exercice 4:

A partir de 7 heures, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt A. Un usager se présente en A entre 7 h et 7 h 30. On fait l'hypothèse que la durée de 7 h à l'heure d'arrivé en A est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0;30]$. Quelle est la probabilité qu'il attende le prochain bus :

1. moins de cinq minutes ?
2. plus de 10 minutes ?

Exercice 5:

Deux amis, Sofiane et Yanis, se donnent rendez-vous entre 19h30 et 20h30 dans un bar. Sofiane décide d'arriver à 20h00, Yanis arrive par contre au hasard entre 19h30 et 20h30.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire égale à l'heure d'arrivée de Yanis ?
2. Calculer la probabilité que Yanis arrive avant Sofiane ?
3. Calculer la probabilité que Sofiane attende plus d'un quart d'heure ?