Chapitre 11: Lois de probabilités

1 Lois de probabilités discrètes

1.1 Loi de Bernoulli

Définition:
Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S) et l'autre échec $(\overline{S})$ avec $P(S) = p$ et $P\left(\overline{S}\right) = 1 - p$.

Exemple:
L'épreuve aléatoire : « on lance un dé cubique équilibré et on s'intéresse à la sortie d'un multiple de 3 »est une épreuve de Bernoulli de paramètre la probabilité du succès « obtenir un multiple de 3 »soit $p = P(S) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Propriété:
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre p. Soit X la v.a qui prend la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de X est :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

*L'espérance est $E(X) = p$ et la variance est $V(x) = p - p^2 = p(1-p)$. On dit que la loi de X est une **loi de Bernoulli de paramètre** p.*

Démonstration:
$V(X) = P(X=0)\left(0 - E(X)\right)^2 + P(X=1)\left(1 - E(X)\right)^2 = p - p^2$.

1.2 Loi binomiale

Définition:
*Lorsqu'on répète n fois la même expérience de Bernoulli de manière **indépendante**, on obtient un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p.*

Définition:
Dans un schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p, la variable aléatoire X associant à chaque issue le nombre de succès a pour loi de probabilité :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ avec } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

*On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** n **et** p. On note X suit $\mathcal{B}(n,p)$.*

Exemple:
On répète 10 fois l'expérience précédente : c'est un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et $\dfrac{1}{3}$. La v.a X donnant le nombre de succès est une loi binomiale de paramètres 10 et $\dfrac{1}{3}$. On en déduit donc que la probabilité d'obtenir exactement 2 fois des nombres multiples de 3 lors de ces 10 lancers (c'est à dire la probabilité d'obtenir exactement 2 succès) est :

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^8 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^8 \simeq 0{,}20.$$

Propriété:
Soit X une loi binomiale de paramètres n et p. On a $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

2 Lois de probabilités continues

Jusqu'à présent, chaque expérience aléatoire conduisait à un univers fini et chaque variable aléatoire prenait un nombre fini de valeurs. On parlait de loi ou de variable aléatoire discrète.

Cependant, il arrive aussi que les issues d'une expérience ou les valeurs prises par une variable aléatoire puissent être n'importe quel nombre d'un intervalle. Par exemple : choisir au hasard un nombre entre 0 et 1, le temps d'attente à un guichet ...

Dans ces cas, on dit que la loi de probabilité est continue ou que la variable aléatoire est continue.

2.1 Loi uniforme

Définition:
Soit une v.a. X telle que pour tout a et b de $[0;1]$:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = b - a.$$

*On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[0\ ;\ 1]$.*

Remarque:
- *Concrètement, cela veut dire que la probabilité d'un intervalle est proportionnelle à sa taille.*
- *Si $a \in [0;1]$, $P(X = a) = 0$.*

2.2 Loi exponentielle

Définition:
Soit $\lambda > 0$ et X une v.a. prenant ses valeurs dans $[0;+\infty[$ telle que pour tout $t \geqslant 0$:

$$P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

*On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre λ.*

Propriété:
Soit X une v.a suivant une loi exponentielle de paramètre λ, alors :
- *pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$:*
$$P(X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$
- *En utilisant l'événement contraire, $P(X > t) = 1 - P(X \geq t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.*
- *Pour tout a et b positifs, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$;*

Remarque:
La loi exponentielle est parfois appelée loi sans vieillissement.
Soit $T > 0$ fixé et $t > 0$, la probabilité que $X > T + t$ sachant que $X > T$ est égale à :

$$\begin{aligned}
P_{X>T}(X > T + t) &= \frac{P((X > T) \cap (X > T + t))}{P(X > T)} \\
&= \frac{P(X > T + t)}{P(X > T)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= P(X > t).
\end{aligned}$$