

Chapitre 12: Produit scalaire dans l'espace

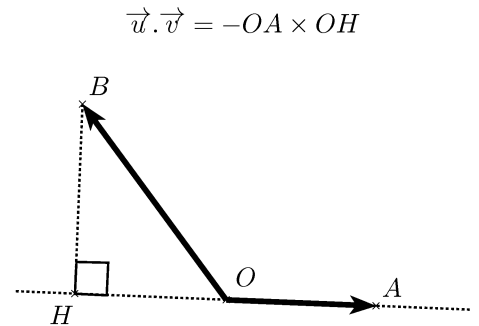
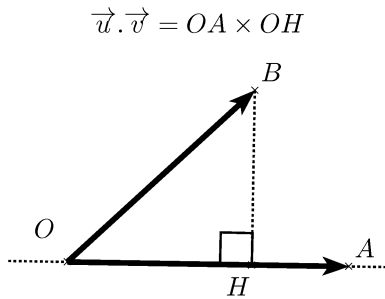
1 Produit scalaire dans le plan

Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1 Différentes expressions du produit scalaire

Définition:

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA) .

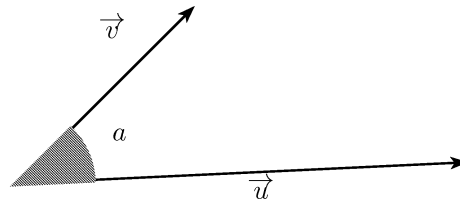


Définition:

Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha)$$

où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



Définition:

Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère orthonormal, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque:

Si $\vec{u}(x; y)$ alors $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ et comme $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, on a :

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Définition:

Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Propriété:

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété:

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :

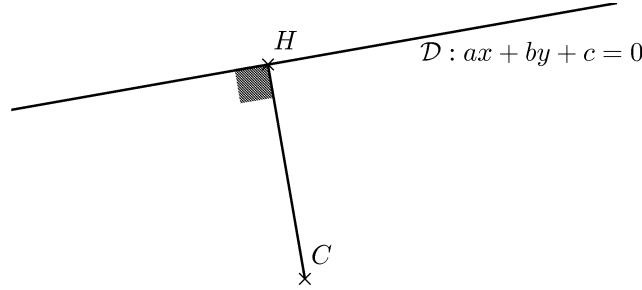
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

1.2 Distance d'un point à une droite

Propriété:

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $ax + by + c = 0$, $C(x_C; y_C)$ un point du plan et H le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{D}$. La distance de C à la droite $\mathcal{D}$ est égale à

$$CH = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



2 Produit scalaire dans l'espace

Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

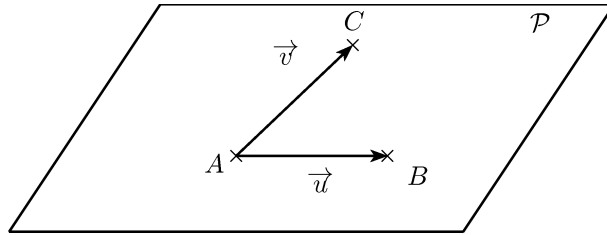
2.1 Définition

Définition:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C .

$\vec{u} \cdot \vec{v}$, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathcal{P}$.



Propriété:

Toutes les propriétés vues sur le produit scalaire dans le plan sont encore valables dans l'espace.

2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriété:

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

Remarque:

Soit A et B deux points de l'espace, comme $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ c'est à dire $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}$, on retrouve la formule de la distance :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

2.3 Règles de calculs

Propriété:

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition:

Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

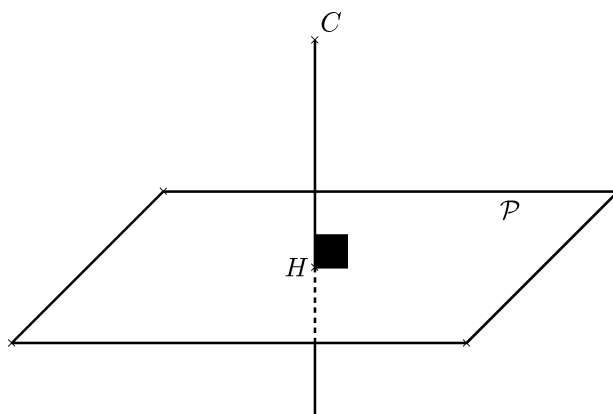
Propriété:

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3.2 Vecteur normal à un plan

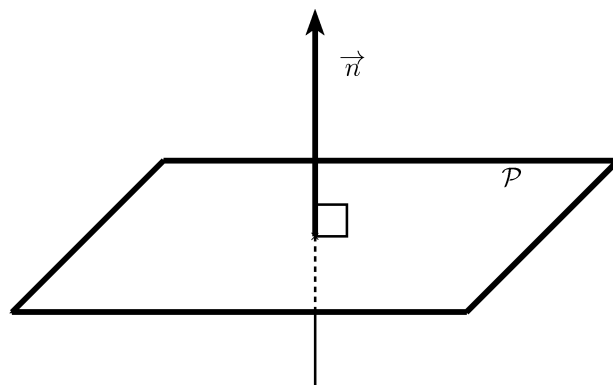
Définition:

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et C un point extérieur à $\mathcal{P}$. Il existe un unique point H dans $\mathcal{P}$ tel que $(CH) \perp \mathcal{P}$. Ce point est appelé le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.



Définition:

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$.



Propriété:

un vecteur est normal (ou orthogonal) à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

3.3 Distance d'un point à un plan

Propriété:

On considère un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A . Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Ce plan est l'ensemble des points M de l'espace tel que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Corollaire:

- Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
- Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

Propriété:

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $C(x_C; y_C; z_C)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$. La distance de C au plan $\mathcal{P}$ est égale à

$$CH = \frac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

4 Sphère de l'espace

Propriété:

La sphère de centre $I(x_I; y_I; z_I)$ et de rayon r a pour équation

$$(x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = r^2.$$

Exemple:

L'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4z = 0$ est la sphère de centre $A(2; -1; 2)$ et de rayon 3.