Chapitre 12: Produit scalaire dans l'espace

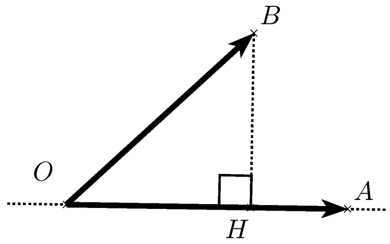
1 Produit scalaire dans le plan

Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

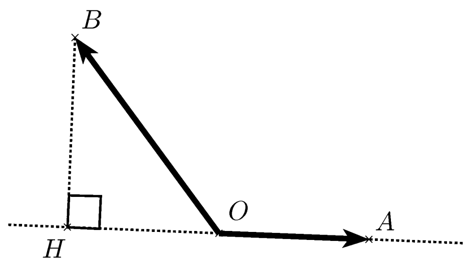
1.1 Différentes expressions du produit scalaire

Définition:
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non-nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$, où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).

$\vec{u}.\vec{v} = OA \times OH$



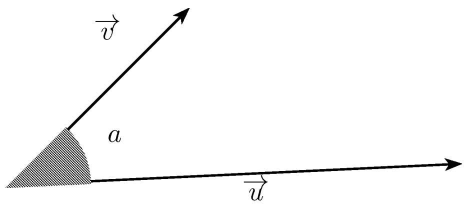
$\vec{u}.\vec{v} = -OA \times OH$



Définition:
Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times cos(\alpha)$$

où α est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



Définition:
Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère orthonormal, alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Remarque:
Si $\vec{u}(x; y)$ alors $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2$ et comme $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$, on a :

$$\vec{u}^2 = ||\vec{u}||^2$$

Définition:
Pour tous vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Propriété:
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété:
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel k :
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(k\,\vec{u}).\vec{v} = k\,(\vec{u}.\vec{v})$