3 Orthogonalité dans l'espace

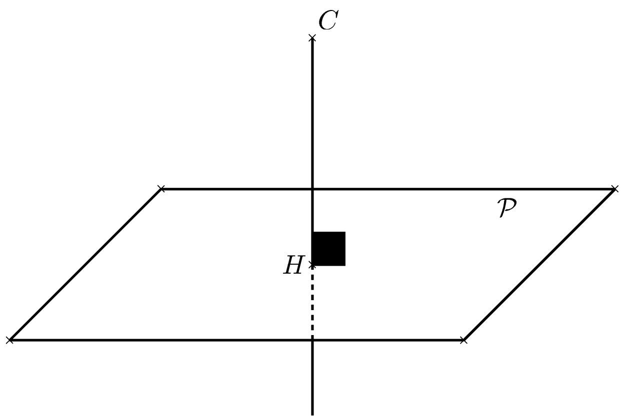
3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition:
Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

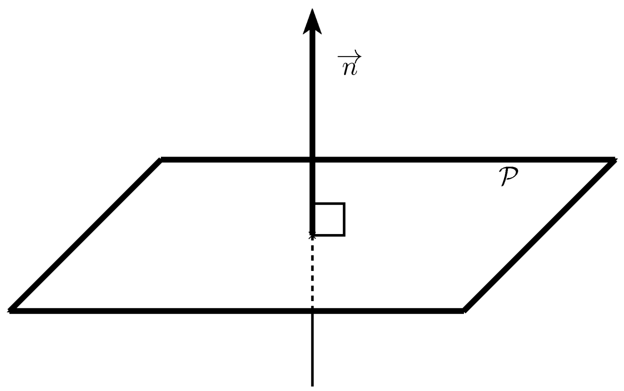
Propriété:
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition:
Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et C un point extérieur à $\mathcal{P}$. Il existe un unique point H dans $\mathcal{P}$ tel que $(CH) \perp \mathcal{P}$.
Ce point est appelé le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.



Définition:
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$



Propriété:
un vecteur est normal (ou orthogonal) à un plan si et seulement si il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

3.3 Distance d'un point à un plan

Propriété:
On considère un vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ et un point A. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Ce plan est l'ensemble des points M de l'espace tel que

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$$

Corollaire:
- *Un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.*
- *Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a; b; c)$.*

Propriété:
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, $C(x_C; y_C; z_C)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$. La distance de C au plan $\mathcal{P}$ est égale à

$$CH = \frac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$