Orthogonalité

Dans ce paragraphe, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition:
Deux vecteurs de l'espace sont dits orthogonaux si l'un des deux vecteurs est nul ou si leurs directions sont orthogonales.

Exercice 1:
Démontrer la propriété suivante :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Définition:
Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur formé par deux points de $\mathcal{P}$.

Exercice 2:
Soit $A(3;5;1)$, $B(-2;5;6)$, $C(0;3;2)$ et $\vec{n}(1;-1;1)$.
1. Montrer que les points A, B et C forment un plan $\mathcal{P}$.
2. Montrer que $\vec{n}$ est normal à $\mathcal{P}$.

Propriété:
On considère un vecteur non nul $\vec{n}$ et un point A. Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
Ce plan est l'ensemble des points M de l'espace tel que

$$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$

Exercice 3:
Démontrer les propriétés suivantes :
- Un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$, où d est un réel.
- Réciproquement, a, b, c et d étant quatre réels donnés avec a, b et c non tous nuls, l'équation $ax + by + cz + d = 0$ définit un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Exercice 4:
Soit $A(-1;8;4)$ et $\vec{n}(1;0:5)$.
1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. $B(4;-3;3)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Exercice 5:
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point C extérieur à $\mathcal{P}$.
Le but de l'exercice est de trouver une formule donnant la distance entre C et $\mathcal{P}$.
1. Faire un dessin sur lequel apparaitra le point H, projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$.
2. Montrer que $CH = \dfrac{|\overrightarrow{CA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ où A est un point de $\mathcal{P}$ et $\vec{n}(a;b;c)$.
3. Justifier que $d = -ax_A - by_A - cz_A$.
4. En déduire que $CH = \dfrac{|ax_C + by_C + cz_C + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Exercice 6:
Soit $A(8;-2;11)$ et $\vec{n}(-3;2:4)$.
1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2. Déterminer la distance entre $C(1;0;3)$ et $\mathcal{P}$.