Produit scalaire dans le plan

Dans toute la feuille, les coordonnées et équations sont données dans un repère orthonormé.

Exercice 1:

Soit DEF un triangle tel que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = -8$, $DE = 6$ et $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \dfrac{-2\pi}{3}$. Déterminer la mesure de DF.

Exercice 2:

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A et ABD un triangle équilatéral tels que C et D soient du même côté de (AB). On note a la longueur AB.

1. Faire un dessin représentant la situation.
2. a. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de a.
   b. En déduire $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC}$.
3. a. Donner une mesure en radians de l'angle $\widehat{CBD}$.
   b. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Exercice 3:

Soit $A(2;1)$, $B(8;2)$ et $C(3;-5)$. Montrer que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 4:

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs tels que : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = -5$; $||\overrightarrow{u}|| = 3$ et $||\overrightarrow{v}|| = 5$. Déterminer $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}||$.

Exercice 5:

Soit $A(5;5)$, $B(1;-3)$ et $\overrightarrow{p}(1;2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_1) passant par A de vecteur normal $\overrightarrow{p}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) passant par B de vecteur directeur $\overrightarrow{p}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_3) passant l'origine de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.
4. Étudier les relations de parallélisme et d'orthogonalité des ces trois droites.

Exercice 6:

Soit $A(2;3)$, $B(-5;2)$ et $C(4;-2)$.

1. Déterminer les coordonnées de H, orthocentre du triangle ABC.
2. Déterminer les coordonnées de Ω, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.
4. Montrer que H, Ω et G sont alignés.

Exercice 7:

On considère une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ et un point C extérieur à $\mathcal{D}$.
Le but de l'exercice est de trouver une formule donnant la distance entre C et $\mathcal{D}$.

1. Faire un dessin sur lequel apparaitra le point H, projeté orthogonal de C sur $\mathcal{D}$.
2. Soit $\overrightarrow{n}(a;b)$, que peut-on dire de ce vecteur ?
3. Montrer que $CH = \dfrac{|\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$ où A est un point de $\mathcal{D}$.
4. Justifier que $c = -ax_A - by_A$.
5. En déduire que $CH = \dfrac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Exercice 8:

Soit $A(1;-3)$, $B(-3;1)$ et $C(0;5)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer la distance entre C et (AB).
3. En déduire l'aire du triangle ABC.