Chapitre 13: Droites et plans de l'espace

Dans ce chapitre, les coordonnées et équations sont données dans une repère orthonormée $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété:
Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point et $\vec{u}(a; b; c)$ un vecteur non nul de l'espace.
Un point M appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

On dit que ce système est une représentation paramétrique (de paramètre t) de la droite.

Démonstration:
$M(x; y; z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}.$$

Exemple:
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(4; 5; 6)$.
On veut savoir si le point $B(-3; -3; -3)$ appartient à $\mathcal{D}$.

- *La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :*

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 5t \\ z = 3 + 6t \end{cases}.$$

- *$B \in \mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que*

$$\begin{cases} -3 = 1 + 4t \\ -3 = 2 + 5t \\ -3 = 3 + 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 4t \\ -5 = 5t \\ -6 = 6t \end{cases} \Leftrightarrow t = 1.$$

  Ainsi, $B \in \mathcal{D}$.

Remarque:
Sans passer par la représentation paramétrique, on aurait également pu calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et vérifier qu'il est colinéaire à $\overrightarrow{u}$.

2 Intersection de deux plans

On considère $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

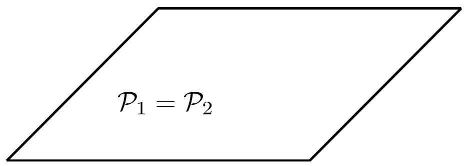
Pour déterminer l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, on résout le système (S) suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \right.$$

De plus, $\overrightarrow{n_1}(a_1; b_1; c_1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{n_2}(a_2; b_2; c_2)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$ donc :

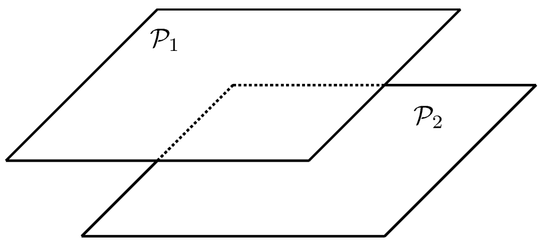
- Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles ou confondus.

$\longrightarrow$ $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus si les équations $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$ sont proportionnelles.



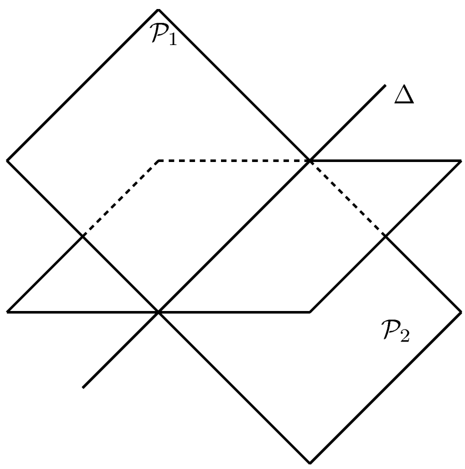
Le système (S) admet alors pour solutions l'ensemble des triplets $(x; y; z)$ solutions de $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ (ou de $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$).

$\longrightarrow$ $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et disjoints sinon.



Le système (S) n'admet alors aucune solution.

- Si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants en une droite Δ.



Le système (S) admet alors pour solutions l'ensemble des triplets $(x; y; z)$ correspondant aux points de la droite Δ.

3 Intersection d'un plan et d'une droite

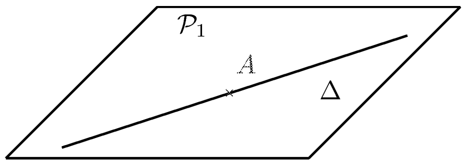
On considère $\mathcal{P}$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a;b;c)$ et une droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(a';b';c')$ passant par $A(x_A;y_A;z_A)$.

Pour déterminer l'intersection de $\mathcal{P}$ et Δ, on résout le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ x=a't+x_A \\ y=b't+y_A \\ z=c't+z_A \end{cases}$$

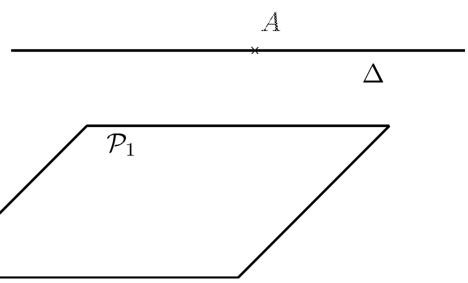
- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux, le plan $\mathcal{P}$ et la droite Δ sont parallèles ou la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

  $\longrightarrow$ la droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si $A \in \mathcal{P}$.



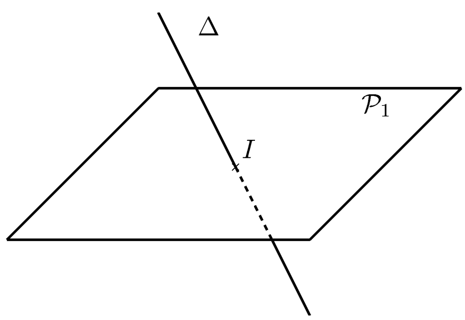
  Le système (S) admet alors pour solutions l'ensemble des triplets $(x;y;z)$ correspondant aux points de la droite Δ.

  $\longrightarrow$ le plan $\mathcal{P}$ et la droite Δ sont parallèles si $A \notin \mathcal{P}$.



  Le système (S) n'admet alors aucune solution.

- Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas orthogonaux, le plan $\mathcal{P}$ et la droite Δ sont sécants en un point I :



  Le système (S) admet une unique solution correspondant aux coordonnées du point I.