Exercices type bac 2011

Réunion Juin 2011(4 points)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1~;~2~;~-4)$ et $(-3~;~4~;~1)$.

1. Soit $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & -8+2t \\ y & = & 7-t \\ z & = & 6+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

   - Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont sécants.
   - Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ n'ont aucun point en commun.
   - La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
   - Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2. On note $\mathcal{P}'$ le plan d'équarion $x+4y-3z+4=0$.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles et distincts.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.
   - Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :
   - une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1~;~3~;~-\dfrac{1}{2}\right)$,
   - une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$.
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{2}=0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=5$ est :
   - une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5~;~5~;~\dfrac{7}{2}\right)$,
   - une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(5~;~-5~;~-\dfrac{7}{2}\right)$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z-5=0$,
   - le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{3}=0$.

Métropole Juin 2011(4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0~;~y_0~;~z_0)$. On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathcal{P}$. *On suppose connue la propriété suivante :*
Propriété : Le vecteur $\vec{n}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathcal{P})$ du point M_0 au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que

$$d(M_0, \mathcal{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

1. Justifier que $\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}\right|=M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
2. Démontrer que $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0H}=-ax_0-by_0-cz_0-d$.
3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives $(4\,;1\,;5)$, $(-3\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ 3\ ;\ 6)$, $(-7\ ;\ 0\ ;\ 4)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$ et que ce plan a pour équation cartésienne $x+2y-z-1=0$.
   b. Déterminer la distance d du point F au plan $\mathcal{P}$.
2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.
   On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
   b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan $\mathcal{P}$.
   c. Retrouver le résultat de la question 1. b.
3. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre F et de rayon 6.
   a. Justifier que le point B appartient à la sphère $\mathcal{S}$.
   b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle $\mathcal{C}$, intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$.

Asie Juin 2011(5 points)

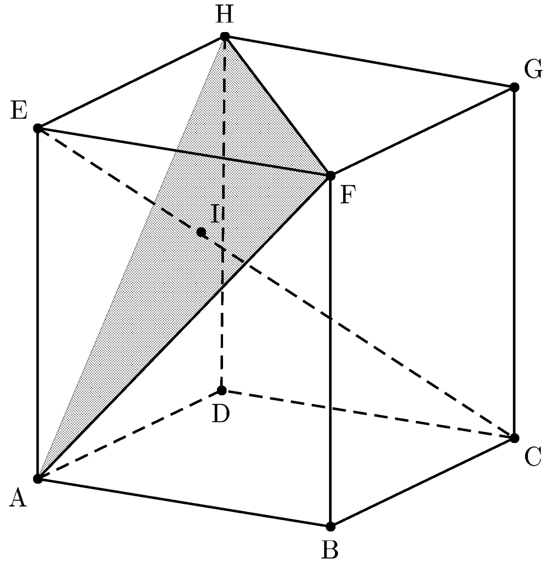
On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $\left(\mathrm{D}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{DH}}\right)$.
   Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

   $$\mathrm{A}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ \mathrm{B}(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\ \mathrm{C}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ \mathrm{D}(0\ ;0\ ;\ 0)\ \mathrm{E}(1\ ;0\ ;\ 1)\ \mathrm{F}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ \mathrm{C}(0\ ;\ 1\ ;\ 1)\ \mathrm{H}(0\ ;0\ ;\ 1)$$

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
   c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).
   d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
   e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
   Que représente le point I pour le triangle AFH ?
2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Définitions :
   - un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
   - il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
   - il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

   Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



Antilles-Guyane Juin 2011(5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3\ ;\ -4\ ;\ 1)$ et dont un vecteur directeur est $\overrightarrow{u}(1\ ;\ -3\ ;\ 1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-t \\ y & = & 2+t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 1-t \end{array}\right.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'. On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ. On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée ci-dessous.

1. On considère le vecteur $\overrightarrow{w}$ de coordonnées $(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$. Démontrer que $\overrightarrow{w}$ est une vecteur directeur de la droite Δ.
2. Soit $\overrightarrow{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$.
   a. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan P.
   b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est $3x + 2y + 3z - 4 = 0$.
3. a. Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.
   b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.
4. a. Déterminer les coordonnées du point H.
   b. Calculer la longueur HH'.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'objectif de cette question est de montrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' \geqslant HH'$.
   a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.
   b. En déduire que $\left|\left|\overrightarrow{MM'}\right|\right|^2 \geqslant \left|\left|\overrightarrow{HH'}\right|\right|^2$ et conclure.
   La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre une point de D et une point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.